פונקציות ממשיות - הרצאה 6

2.11.10

הגדרה. יהי (X,Σ) מרחב מדיד, ויהיו $\{a_i\}_{n=1}^{n} \subseteq \mathbb{R}$ וכן $\{E_i\}_{n=1}^{n} \subseteq \Sigma$. פונקציה מהצורה $\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$ נקראת פונקציה פשוטה.
היא מקבלת מספר סופי של ערכים, ועל כן, מדידה.

תזכורת.

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in \complement E \end{cases}$$

נראה כי בעזרת פונקציות פשוטות אפשר לבנות כל פונקציה אחרת.

משפט. תהי $f : X \to [-\infty, \infty]$ פונקציה מדידה.
קיימת סדרה של פונקציות פשוטות המתכנסת ל-f בכל נקודה $x \in X$.
יתר על כן, אם $f \geq 0$ אז אפשר לבחור את הסדרה הנ"ל לא יורדת. אם f חסומה אזי קיימת סדרה כנ"ל שמתכנסת במידה שווה.

הוכחה. נתחיל מ- f מדידה אי שלילית. נגדיר:

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{i-1}{2^n}, & \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \\ n, & f(x) \geq n \end{cases}$$

הרעיון: נחלק את הטווח עד n לקטעים שווים באורך $\frac{1}{2^n}$ וכך נקבל שאורכם שואף ל-0. בכל קטע נגדיר "פונקצית מדרגות".
לכל n הקבוצה $\{x \in X : \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}\}$ היא מדידה (כי f היא מדידה). מההגדרה f_n פשוטה.

טענה. $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ לכל x, ולכל n ולכל x $f_n(x) \to f(x)$.
אם $\frac{i-1}{2^n} \leq f(x)$ אז $\frac{i-1}{2^n} \leq f_n(x)$

הוכחה. יהי $x \in X$ נניח

$$\frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}$$

עבור 2^n כך ש- $1 \leq i \leq n$ אז

$$f_n(x) = \frac{i-1}{2^n}$$

או בכתיב אחר

$$f_n(x) \geq \frac{(2i-1)-1}{2^{n+1}}$$

על פי ההערה הקודמת

$$f_n = \frac{i-1}{2^n} = \frac{2(i-1)-1}{2^{n+1}} \leq f_{n+1}(x)$$

אחרת $f(x) \geq n$ אז $f_n(x) = n$.

$$n = \frac{n(2^{n+1}-1)}{2^{n+1}} \leq f(x)$$

אז לפי ההערה

$$f_n(x) = n = \frac{n(2^{n+1}-1)}{2^{n+1}} \leq f(x)$$

□

תהי $x \in X$
מקרה ראשון: $f(x) = \infty$
אז $f_n(x) = n$ לכל n.
אזי

$$\{f_n(x)\} = \{n\} \to \infty = f(x)$$

מקרה שני: $0 \leq f(x) \leq \infty$
קיים $f(x) \leq n_0$ טבעי. אם $n > n_0$ אזי $f(x) < n$.
קודם כל $f(x) - f_n(x) \geq 0$
ובנוסף $f(x) - f_n(x) \leq 0$

$$f_n(x) \to f(x)$$

נראה כעת שאם $0 \leq f(x) < M$ אזי $\{f_n\}$ מתכנסת ל-f במידה שווה.
$f(x) \leq M$ לכל $x \in X$.
אם $n > M$ אז $f(x) < n$.

$$\frac{1}{2^n} > f(x) - f_n(x) \geq 0$$

לכל הנקודות $x \in X$ (וגם לכל $n > M$), לכן ההתכנסות היא במידה שווה.
נניח לבסוף f מדידה כלשהי.
כותבים $f = f^+ - f^-$. מדידות אי שליליות. על פי החלק הראשון:
$\{\varphi_n\}$ מתכנסת ל- f^+ $\{\psi_n\}$ מתכנסת ל- f^-
ההפרש של פונקציות פשוטות הוא פשוט וכעת $f \to \varphi_n - \psi_n$.
אם f חסומה אז גם f^+, f^- חסומה ואז ההפרש יתכנס במידה שווה. □

למה. תהי (X, Σ, μ) מידה שלמה, ותהיינה $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ שכמעט בכל מקום $f = g$.
אם f מדידה אזי גם g מדידה.

הוכחה.
$$E := \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$$

$\mu(E) = 0$
בגלל שהמידה שלמה $g|_E$ פונקציה מדידה. $f|_{X\setminus E} = g|_{X\setminus E}$ ולכן מדידה.
לכן g מדידה. $\square$

למה. תהי (X, Σ, μ) מידה שלמה. אם סדרה של פונקציות מדידות $\{f_n\}$ מתכנסת כמעט בכל מקום לפונקציה f אזי f מדידה.

הוכחה.
$$E := \{x \in X : f_n(x) \nrightarrow f(x)\}$$

$$\mu(E) = 0$$

$f|_E$ מדידה.
כעת על $X \setminus E$

$$\forall x \in X \setminus E f_n(x) \to f(x)$$

$$f(x) = \limsup_n f_n(x)$$

לכל $x \in X \setminus E$ הוכחנו שזה פונקציה מדידה ולכן $f|_{X\setminus E}$ מדידה .
לכן f מדידה. $\square$