פונקציות ממשיות - הרצאה 5

31.10.10

קבוצה לא מדידה לפי לבג על הישר

לכל שתי נקודות $x,y \in [0,1)$ מגדירים $x \sim y$ יחס שקילות אם $x-y$ רציונלי.
כדי לבנות קבוצה לא מדידה נצטרך להשתמש באקסיומת הבחירה. למעשה כל הדוגמאות של קבוצות לא מדידות לבג משתמשות באקסיומת הבחירה $\Leftarrow$ מערכת האקסיומות בלי אקסיומת הבחירה לא סותרת את האפשרות שכל הקבוצות מדידות לבג.
מחלקות שקילות הן מן הסתם זרות. תהי P תת־קבוצה של $[0,1)$ המכילה נקודה אחת ורק אחת מכל מחלקת שקילות. נראה כי P לא מדידה לפי לבג. תהי $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ ספירה של כל הרציונליים על $[0,1)$ כך ש- $R_0=0$.
נגדיר:

$$P_n := R_n \dot{+} P$$

עבור $n=0,1,2,\dots$ (כמובן $P_0=P$).
אם $i \neq j$ אזי $P_i \cap P_j = \varnothing$ (נסו להוכיח את זה כתרגיל, נובע מכך שמכל מחלקת שקילות בחרנו רק נקודה אחת).

טענה.

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} P_n = [0,1)$$

הוכחה.
$\subseteq$ ברור.
$\supseteq$ יהי $x \in [0,1)$. קיימת $a \in P$ כך ש- $x \sim a$.

1. אם $a \leq x$ אז $x-a=r_n$ עבור n מסויים. כלומר $x=a+r_n$ לכן $x \in P_n$.
2. אם $x < a$ אז $a-x=r_n$ עבור n מסויים. כלומר $x=a-r_n$ לכן $1+x=a-(1-r_n)$ כעת $a+(1-r_k)>1$ ואז $x=a+(1-r_k)$ עבור k מסויים. לכן $x \in P_k$.

נניח בשלילה ש-P מדידה. לכן, בפרט כל P_n מדידה וכן מתקיים לכל n:

$$m(P_n)=m(P)$$

מכאן:

$$1=m([0,1))=\sum_{n=0}^{\infty} m(P_n)=\sum_{n=0}^{\infty} m(P)=\begin{cases}\infty, & m(P)>0\\ 0, & m(P)=0\end{cases}$$

כי זהו טור של מספרים שווים. בכל אחד מהמקרים - סתירה. $\square$

כשדיברנו על ההרחבה של אינטגרל חילקנו את הטווח של הפונקציה (במקום התחום כמו שעושים באינטגרל רימן). הסתכלנו על הקבוצות $\{x : y_i < f(x) < y_{i+1}\}$ ובסכום השתמשנו במידות של קבוצות כאלה. כמובן שהיינו צריכים להוכיח שקבוצות מסוג זה מדידות. היות וקבוצות כאלה לאו דווקא מדידות נדבר על הפונקציות שקבוצות כאלה יהיו מדידות.
באופן כללי, כדי לא להגביל את עצמנו רק לישר, נתבונן בהגדרה הבאה:

הגדרה. יהי (x, Σ) מרחב מדיד. קבוצה $E \in \Sigma$ נקראת מדידה אם אפשר לבנות אלגברה־σ של תת־קבוצות של E. נסמן:

$$\Sigma_E := \{F \in \Sigma : F \subseteq E\}$$

או באופן שקול:

$$\Sigma_E = \{F \cap E : F \in \Sigma\}$$

משפט. תהי $f : X \to [-\infty, \infty]$. הטענות הבאות שקולות:

1. לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ הקבוצה $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ שייכת ל־ Σ.
2. לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ הקבוצה $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ שייכת ל־ Σ.
3. לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ הקבוצה $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ שייכת ל־ Σ.
4. לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ הקבוצה $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$ שייכת ל־ Σ.

הערה. נשים לב לצורה האלטרנטיבית לכתוב לדוגמא את התנאי הראשון:

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, \infty])$$

ובאותו אופן אפשר לכתוב את שאר התנאים.

הוכחה. נשים לב כי:

$$X \setminus \{x \in X : f(n) > \alpha\} = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$$

לכן $2 \Leftrightarrow 1$.
באותו אופן:

$$X \setminus \{x \in X : f(n) < \alpha\} = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$$

לכן $4 \Leftrightarrow 3$.

$4 \Leftarrow 1$
יהי $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\}$$

לכל n מתקיים $\{x \in X : f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\} \in \Sigma$ לכן גם החיתוך האינסופי ב־ Σ. לכן

$$\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\} \in \Sigma$$

$2 \Leftarrow 3$

יהי $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\{x \in X : f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) < \alpha - \frac{1}{n}\}$$

לכל n מתקיים $\{x \in X : f(x) < \alpha - \frac{1}{n}\} \in \Sigma$ לכן גם החיתוך האינסופי ב- Σ. לכן

$$\{x \in X : f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) < \alpha - \frac{1}{n}\} \in \Sigma$$

$\square$

הגדרה. $f : X \to [-\infty, \infty]$ נקראת מדידה ביחס למרחב המדיד (או עבור המרחב המדיד) (X, Σ) אם לה אחת התכונות $1, 2, 3, 4$ (ולכן מהמשפט כל התכונות).

למה. תהי $E \subseteq X$. הפונקציה $\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in \complement E \end{cases}$ מדידה ביחס למרחב המדיד $\Leftrightarrow$ $E \in \Sigma$.

הוכחה. תרגיל. רמז: להפריד למקרים $\alpha > 0$, $\alpha < 0$, $\alpha = 0$.

דוגמא. המרחב המדיד $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה. אזי f מדידה עבור $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ עבור $\alpha \in \mathbb{R}$ $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < \alpha\}$ קבוצה פתוחה ולכן ב- $\mathcal{B}$.

סימון: $\mathcal{L}$ כל הקבוצות המדידות לפי לבג. כמובן ש- f רציפה היא גם מדידה ב-$(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ כי $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}$.

נחזור למרחב מדיד כללי (X, Σ).

תכונות של פונקציות מדידות:

למה. יהי $\alpha \in [-\infty, \infty]$. אם f מדידה אזי

$$f^{-1}(\{\alpha\}) \in \Sigma$$

הוכחה. נפריד למקרים:

1. $-\infty < \alpha < \infty$

$$f^{-1}(\{\alpha\}) = f^{-1}([-\infty, \alpha]) \cap f^{-1}([\alpha, \infty])$$

הפונקציה היא מדידה, לכן שתי הקבוצות באגף ימין ב- Σ, ולכן אגף שמאל ב- Σ.

2. $\alpha = \infty$ תרגיל.
3. $\alpha = -\infty$ תרגיל.

למה. נניח $f : X \to [-\infty, \infty]$ מדידה ותהי $E \subseteq \Sigma$. אזי $f|_E$ מדידה עבור המרחב המדיד (E, Σ_E)

הוכחה. תרגיל.

למה. תהי $E \in \Sigma$ ונניח $f : E \to [-\infty, \infty]$ מדידה עבור המרחב המדיד (E, Σ_E), ותהיה $g : \complement E \to [-\infty, \infty]$ מדידה עבור $(\complement E, \Sigma_{\complement E})$.
נגדיר: $\varphi : X \to [-\infty, \infty]$ באופן הבא:

$$\varphi(x) := \begin{cases} f(x), & x \in E \\ g(x), & x \in \complement E \end{cases}$$

אזי φ מדידה עבור (X, Σ).

הוכחה. לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\{x \in X : \varphi(x) > \alpha\} = \{x \in E : \varphi(x) > \alpha\} \cap \{x \in \complement E : \varphi(x) > \alpha\}$$

מההנחה שתי הקבוצות באגף ימין ב- Σ. לכן החיתוך ב-Σ ו- φ מדידה לפי ההגדרה.
$\square$

למה. תהי $f : X \to [-\infty, \infty]$ מדידה ו- $a \in \mathbb{R}$. אזי $a + f$ ו- af מדידות. (כדי להמנע מסיבוכים מיותרים, נגדיר $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot 0 = 0$).

הוכחה. יהי $\alpha \in \mathbb{R}$
מתקיים

$$\{x \in X : a + f(x) > \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \alpha - a\}$$

לכן $f + a$ מדידה.
אם $a = 0$ אזי $a \cdot f \equiv 0$ בפרט מדידה.
אם $a > 0$ אזי

$$\{x \in X : a \cdot f(x) > \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \frac{\alpha}{a}\}$$

ולכן $a \cdot f$ מדידה.
אם $a < 0$ אזי

$$\{x \in X : a \cdot f(x) > \alpha\} = \{x \in X : f(x) < \frac{\alpha}{a}\}$$

ולכן $a \cdot f$ מדידה.
$\square$

למה. נניח $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ מדידות ו- $a \in \mathbb{R}$ נגדיר:

$$(f+g)(x) := \begin{cases} a, & f(x) = \infty \wedge g(x) = -\infty \\ a, & f(x) = -\infty \wedge g(x) = \infty \\ f(x) + g(x), & \text{אחרת} \end{cases}$$

אז $f + g$ מדידה.

הוכחה. נסמן

$$E := \{x \in X : f(x) = \infty \wedge g(x) = -\infty\} \cup \{x \in X : f(x) = -\infty \wedge g(x) = \infty\}$$

קבוצת הנקודות "הבעיתיות" שלנו. נשים לב שהיא ב-Σ כאיחוד של שתי קבוצות מ- Σ.
נגדיר:

$$F := X \setminus E$$

גם כן מדידה. כעת לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ $(f+g)|_E$ היא מדידה ביחס ל- Σ_E כי פונקציה קבועה.
כמו כן, $(f+g)|F$ מדידה ביחס ל- Σ_F היות ו:

$$\{x \in F : f(x) + g(x) > \alpha\} = \{x \in F : f(x) = \alpha - g(x)\} =$$
$$= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{x \in F : f(x) > r\} \cap \{x \in F : r > \alpha - g(x)\}) =$$
$$= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{x \in F : f(x) > r\} \cap \{x \in F : g(x) > \alpha - r\})$$

הקבוצות באגף ימין כולן ב- Σ_F כי f, g מדידות, לכן האיחוד ב- Σ_F. כלומר $(f+g)|_{\Sigma_F}$ מדידה. מלמה, $f+g$ מדידה.

□

למה. תהי $f : X \to [-\infty, \infty]$ מדידה. אזי f^2 מדידה.

הוכחה. אם $\alpha \geq 0$ אזי

$$\{x \in X : f^2(x) > \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in X : f(x) < -\sqrt{\alpha}\}$$

שתי הקבוצות באגף ימין ב- Σ לכן הפונקציה מדידה.
אם $\alpha < 0$ אזי

$$\{x \in X : f^2(x) > \alpha\} = X$$

בפרט ב- Σ ולכן הפונקציה מדידה. □

למה. תהיינה $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ מדידות. אזי $f \cdot g$ מדידה.

הוכחה. נגדיר:

$$E_1 := \{x \in X : -\infty < f(x), g(x) < \infty\}$$

$$E_2 := X \setminus E_1$$

כמובן, ששתי הקבוצות ב- Σ נראה כי $(fg)|_{E_1}$, $(fg)|_{E_2}$ פונקציות מדידות.
על E_1:

$$f(x)g(x) = \frac{1}{2}\left((f(x)+g(x))^2 - f(x)^2 - g(x)^2\right)$$

מהלמות שכבר הוכחנו מדידה.
על E_2:

$$fg(x) = \begin{cases} 0, & f(x) = 0 \vee g(x) = 0 \\ \infty, & f(x) > 0, g(x) > 0, \\ -\infty, & \text{אחרת} \end{cases}$$

המשך - תרגיל.

למה. אם $f,g : X \to [-\infty,\infty]$ מדידות אזי $min\{f,g\}, max\{f,g\}$ מדידות.

הוכחה. נגדיר $h_1(x) = max\{f(x),g(x)\}$. תהי $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{x \in X : h_1(x) > \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in X : g(x) > \alpha\}$$

אגף ימין שייך ל- Σ לכן $h_1(x)$ מדידה. ובאופן דומה עבור $h_2(x) = min\{f(x),g(x)\}$. תהי $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{x \in X : h_2(x) > \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in X : g(x) > \alpha\}$$

אגף ימין שייך ל- Σ לכן $h_1(x)$ מדידה. $\square$

מסקנה. אם $f,g : X \to [-\infty,\infty]$ מדידות אזי הפונקציות הבאות מדידות:

$$f^+(x) := \max\{f(x),0\}$$

$$f^-(x) := \min\{-f(x),0\}$$

$$|f(x)| := f^+ + f^-$$

למה. תהי $\{f_n\}$ סדרה של פונקציות מדידות על X. אזי כל הפונקציות הבאות מדידות:

$$\sup_n\{f_n\}$$

$$\inf_n\{f_n\}$$

$$\limsup f_n$$

$$\liminf f_n$$

הוכחה. יהי $\alpha \in \mathbb{R}$. נסמן $g := \sup_n f_n$.

$$\{x \in X : g(x) > \alpha\} = \bigcup_n \{x \in X : f_n(x) > \alpha\}$$

כמובן שבאגף ימין קבוצות מדידות, חיתוכן גם כן מדיד ולכן g מדידה.

נסמן $h := \inf_n f_n$.

$$\{x \in X : g(x) < \alpha\} = \bigcup_n \{x \in X : f_n(x) < \alpha\}$$

כמובן שבאגף ימין קבוצות מדידות, איחודן גם כן מדיד ולכן g מדידה.

$$\limsup_n f_n(x) = \inf_k \sup\{f_k(x), f_{k+1}(x), \cdots\}$$

הפוקציה $\sup\{f_k(x), f_{k+1}(x), \cdots\}$ מדידה לכל k לכן האינפימום מדיד גם כן.

$$\liminf_n f_n(x) = \sup_k \inf\{f_k(x), f_{k+1}(x), \cdots\}$$

הפוקציה $\inf\{f_k(x), f_{k+1}(x), \cdots\}$ מדידה לכל k לכן הסופרמום מדיד גם כן. $\square$

נמשיך לדבר על מרחבי מידה.

הגדרה. תהי $P(x)$ תכונה של קבוצה התלויה ב־ $x \in X$. נאמר כי $P(x)$ מתקיימת כמעט בכל מקום אם $\{x \in X : P(x)$ לא מתקיימת$\}$ היא קבוצה זניחה (כלומר ב־Σ ובעלת מידה 0).

לא ברור? נראה דוגמאות.

דוגמאות.

1. פונקציה f היא סופית כמעט בכל מקום אם הקבוצה $\{x \in X : |f(x)| = \infty\}$ היא קבוצה ממידה 0.
2. נאמר כי $f = g$ כמעט בכל מקום אם הקבוצה $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ היא קבוצה ממידה 0.

לא ברור? ברור מאוד.

הגדרה. יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה. נאמר כי המידה μ שלמה (או שהמרחב שלם) אם לכל $E \in \Sigma$ כך ש־$\mu(E) = 0$ ולכל $F \subseteq E$ מתקיים: $F \in \Sigma$ וכן $\mu(F) = 0$

למעשה כל מידה שמוגדרת בעזרת מידה חיצונית היא מידה שלמה. האם יש מידות לא שלמות? בוודאי. לדוגמא הצמצום של המידה של לבג על הקבוצות הבורליות. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$. לדוגמא קבוצת קנטור היא קבוצה מדידה לבג ובורלית, כל תת־הקבוצות שלה מדידות לבג אך יש $2^{\aleph}$ כאלה ורק $\aleph$ בורליות.