# פונקציות ממשיות - הרצאה 4

26.10.10

בשעיור הקודם התחלנו להוכיח משפט. נמשיך את ההוכחה ואף נוסיף טענה שקולה נוספת:

**משפט.** תהי $E \subseteq \mathbb{R}$. התנאים הבאים שקולים:

1. $E$ מדידה לפי לבג.
2. לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $O$ פתוחה המקיימת $O \supseteq E$ ו- $m^*(O \setminus E) < \varepsilon$.
3. לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $F$ סגורה המקיימת $F \subseteq E$ ו- $m^*(E \setminus F) < \varepsilon$.
4. קיימת קבוצה $G_\delta$, $G$ נאמר, המקיימת $E \subseteq G$ ו- $m^*(G \setminus E) = 0$
5. קיימת קבוצה $F_\sigma$, $F$ נאמר, המקיימת $F \subseteq E$ ו- $m^*(E \setminus F) = 0$

אם $m^*(E) < \infty$ אזי התכונות 1–5 שקולות גם לתכונה:

6. לכל $\varepsilon > 0$ קיים איחוד סופי $U$ של קטעים פתוחים המקיים $m^*(E \triangle U) < \varepsilon$.

הערה. כמובן ש-$\triangle$ הוא לא אחר מאשר ההפרש הסימטרי המוגדר ע"י

$$E \triangle U = (E \setminus U) \cup (U \setminus E)$$

הוכחה. ראינו בשיעור הקודם $1 \Leftarrow 2 \Leftarrow 4 \Leftarrow 1$. נראה כעת $1 \Leftarrow 3 \Leftarrow 5 \Leftarrow 1$.
$1 \Leftarrow 3$: יהי $\varepsilon > 0$. $E$ קבוצה מדידה לבג לכן גם $\complement E$ מדידה לבג. נשתמש ב- (2) עבור הקבוצה $\complement E$: קיימת $O \supseteq \complement E$ קבוצה פתוחה כך ש-

$$m(O \setminus \complement E) < \varepsilon$$

(שוב הקבוצה מדידה, לכן נכתוב פשוט מידה). נסמן $F := \complement O$ קבוצה סגורה. מתקיים

$$\complement O = F \subseteq E$$

וכן

$$E \setminus F = O \setminus \complement E$$

לכן

$$m(E \setminus F) = m(O \setminus \complement E) < \varepsilon$$

כנדרש.
$3 \Leftarrow 5$: ההנחה מתקיימת בפרט עבור $\varepsilon = \frac{1}{n}$. כלומר לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת $F_n$ סגורה המקיימת $F_n \subseteq E$ ו- $m^*(E \setminus F_n) < \frac{1}{n}$.

נגדיר $H := \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ קבוצה $F_\sigma$. היות ו- $E \supseteq F_n$ גם $E \supseteq H$. כמו כן, לכל $n \in \mathbb{N}$
$E \setminus F_n \supseteq E \setminus H$, לכן לכל $n \in \mathbb{N}$

$$m^*(E \setminus H) \leq m^*(E \setminus F_n) < \frac{1}{n}$$

לכן $m^*(E \setminus H) = 0$.
$5 \Leftarrow 1$
נרשום $E = H \cup (E \setminus H)$. הקבוצות מדידות לבג (אחת כקבוצה $F_\sigma$, השנייה כקבוצה ממידה חיצונית 0), לכן גם $E$ מדידה לבג.

נניח כעת $m^*(E) < \infty$.
$2 \Leftarrow 6$
יהי $\varepsilon > 0$. קיימת $O$ פתוחה המקיימת $O \supseteq E$ ו- $m^*(O \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2}$.
$O$ היא קבוצה פתוחה לכן ניתן להציגה כאיחוד בן־מניה של קטעים פתוחים זרים שתיים־שתיים: $O = \bigcup_n I_n$.
נכתוב $O = E \cup (O \setminus E)$ שתי הקבוצות ממידה סופית.

$$\sum_n m(I_n) = m(\bigcup_n I_n) = m(O) < \infty$$

לכן הטור מתכנס. כלומר, קיים $p$ כך שמתקיים $\sum_{n>p} < \frac{\varepsilon}{2}$.
נגדיר $U := \bigcup_{n=1}^{p} I_n$. מתקיים $U \setminus E \subseteq O \setminus E$, אזי

$$m * (U \setminus E) \leq m^*(O \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2}$$

כמו כן כל הנקודות של $E$ נמצאות ב-$U$, אזי אם לא נמצאות ב- $U$ אז נמצאות בחלק של הכיסוי שלא נכנס ל- $U$:

$$m^*(E \setminus U) \leq m^*(\bigcup_{n>p} I_n \leq \sum_{n>p} m^*(I_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

לבסוף:

$$m^*(E \triangle U) \leq m^*(E \setminus U) + m^*(U \setminus E) < \varepsilon$$

$6 \Leftarrow 2$
יהי $\varepsilon > 0$. לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים איחוד סופי $U_n$ של קטעים פתוחים המקיים

$$m^*(E \triangle U_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

נסמן $O := \bigcup_n U_n$ קבוצה פתוחה. מתקיים לכל $n \in \mathbb{N}$: $E \setminus O \subseteq E \setminus U_n$. מכאן, לכל $n \in \mathbb{N}$:

$$m^*(E \setminus O) \leq m^*(E \setminus U_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

לכן, $m^*(E\setminus O)=0$.
מצד שני, $O\setminus E=\bigcup_n U_n\setminus E=\bigcup_n (U_n\setminus E)$. משום כך,

$$m^*(O\setminus E)=m^*(\bigcup_n (U_n\setminus E)\leq \sum_n m^*(U_n\setminus E)<\sum_n \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}=\frac{\varepsilon}{2}$$

קיבלנו אפוא קבוצה פתוחה $O$ שמקיימת את התנאי על ההפרש הסימטרי. הבעיה היא ש־$O$ אינה מכילה את $E$. עם זאת, כל מה שמפריד בין $O$ ל־$E$ היא קבוצה ממידה 0.
מתכונה (2) על הקבוצה $E\setminus E$, קיימת $V$ פתוחה כך ש־ $V\subseteq O\setminus E$ ו־ $m^*(v)<m^*(E\setminus O)+\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}$ כי $m^*(E\setminus O)=0$.
כעת, $E\subseteq O\cup V$ פתוחה,

$$m^*((O\cup V)\setminus E)\leq m^*(O\setminus E)+m^*(V)<\varepsilon$$

□

נראה דוגמא לתת־קבוצה של הישר שאינה מדידה לפי לבג.

**הגדרה.** נגדיר חיבור מודולו 1 בקטע $[0,1)$:

$$x\dot{+}y=\begin{cases}x+y, & x+y<1\\ x+y-1, & x+y\geq 1\end{cases}$$

**הגדרה.**

$$x\dot{+}E=\{x\dot{+}y:y\in E\}$$

**למה.** יהיו $E\subseteq[0,1)$ ו־ $x\in R$. אם $E$ מדידה אזי גם $x\dot{+}E$ מדידה ומתקיים:

$$m(x\dot{+}E)=m(E)$$

.

הוכחה. נגדיר:

$$E_1:=E\cap[0,1-x)$$

$$E_2:=E\cap[1-x,1)$$

שאר ההוכחה - תרגיל נהדר לקורא החרוץ. □

אז איפה הקבוצה הלא מדידה? נראה אותה בשיעור הבא.