פונקציות ממשיות ־ הרצאה 3

24.10.10

נניח X קבוצה, $\mu^* : P(X) \to [0,\infty)$ מידה חיצונית. בשיעור הקודם דיברנו על תכונות של קבוצות מדידות ביחס ל־ μ^*. בין השאר ראינו 3 תכונות מעניינות:

1. X עצמו הוא קבוצה מדידה.
2. לכל תת־קבוצה מדידה $A \subseteq X$ גם $\complement A$ היא קבוצה מדידה.
3. עבור $\{E_i\}_{i=1}^n$ קבוצות מדידות זרות שתיים־שתיים, גם $E = \bigcup\limits_{i=1}^n E_i$ היא קבוצה מדידה.

כהרגלנו, קובץ יפה כל כך של תכונות יהפוך להגדרה חדשה.

הגדרה. תהי X קבוצה. משפחה Σ המורכבת מתת־קבוצות של X נקראת אלגברה־σ אם לה התכונות הבאות:

1. $X \in \Sigma$.
2. אם $E \in \Sigma$ אזי גם $\complement E \in \Sigma$ (כמובן הכוונה למשלים ביחס ל־ X).
3. אם $\{E_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \Sigma$ אזי גם $\bigcup\limits_{i=1}^\infty E_i \in \Sigma$ (כמובן שאז התכונה נכונה גם עבור סדרה סופית, פשוט ניקח $\varnothing$ החל ממקום מסויים בסדרה).

הערה. אם תכונה 3 מתקיימת רק עבור סדרה סופית של תת־קבוצות, המשפחה נקראת "אלגברה".

משפט. משפחת כל תת־הקבוצות מדידות ־ μ^* מהווה אלגברה־σ. (בפרט קבוצות מדידות לבג על הישר הממשי).

אפילו לא ננסה להוכיח. הגדרנו אלגברה־σ לפי התכונות האלה.

משפט. תהיינה $\{E_i\}_{i=1}^\infty$ קבוצות מדידות ־ μ^* וזרות שתיים־שתיים. אזי:

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^\infty E_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu^*(E_i)$$

לא ראינו את זה כבר פעם? לא. ראינו עבור סדרה סופית של קבוצות.

הוכחה. אכן $\forall n \in \mathbb{N}$ ראינו כבר,

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n \mu^*(E_i)$$

כמובן שמתקיים $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^n \mu^*(E_i) = \mu^*(\bigcup_{i=1}^n E_i) \leq \mu^*(\bigcup_{i=1}^\infty E_i)$$

כלומר, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^n \mu^*(E_i) \leq \mu^*(\bigcup_{i=1}^\infty E_i)$$

לכן (היות ומתקיים לכל $n \in \mathbb{N}$) ,

$$\sum_{i=1}^\infty \mu^*(E_i) \leq \mu^*(\bigcup_{i=1}^\infty E_i)$$

מצד שני, מהגדרת המידה החיצונית

$$\sum_{i=1}^\infty \mu^*(E_i) \geq \mu^*(\bigcup_{i=1}^\infty E_i)$$

לכן השוויון נובע. □

כלומר המידה החיצונית היא סיגמא־אדיטיבית על הקבוצות המדידות. זה מביא אותנו להגדרה חדשה:

הגדרה. תהי X קבוצה ו- Σ σ–אלגברה של תת־קבוצות של X. הפונקציה

$$\mu : \Sigma \to [0, \infty]$$

נקראת מידה על Σ אם מקיימת התכונות הבאות:

1. $\mu(\varnothing) = 0$

2. סיגמא־אדיטיביות: לכל $\{E_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \Sigma$ זרות שתיים־שתיים מתקיים:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^\infty E_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(E_i)$$

ברור שהתכונה נכונה גם לסדרה סופית של קבוצות, כי ניקח את $\varnothing$ החל ממקום מסויים, מצד אחד האיחוד לא משתנה ומצד שני דאגנו בהגדרה שהמידה של $\varnothing$ לא תשנה את הסכום.

מכאן מסקנה מחרישה:

מסקנה. הצמצום של מידה חיצונית לσ–אלגברה של תת־הקבוצות המדידות היא מידה. מידה כזאת נקראת המידה המושרית (המוגדרת) על־ידי μ^*.

בפרט, אם נצמצם את המידה החיצונית של לבג נקבל את מידת לבג. מן הסתם לא תמיד נשתמש במידות משורות. לפעמים נרצה להגדיר ישירות מידה ולא להשתמש בצמצום.

מינוח. עבור קבוצה X, Σ היא אלגברה- σ של תת־קבוצות של X, μ מידה על Σ.
הזוג (X,Σ) נקרא מרחב מדיד.
השלשה (X,Σ,μ) נקראת מרחב מידה.

תכונות פשוטות של מרחב מידה:

משפט. יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה. אם $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ סדרה לא יורדת (לפי הכלה, כלומר $\forall i, E_i \subseteq E_{i+1}$) אזי:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(E_i)$$

הוכחה. נכתוב $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i = E_1 \cup \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(E_{i+1}\setminus E_i)$ כעת, קיבלנו באיחוד קבוצות זרות שתיים-שתיים.

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \mu(E_1) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_{i+1}\setminus E_i) =$$
$$= \mu(E_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(E_{i+1}\setminus E_i) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mu(E_1) + \sum_{i=1}^{n} \mu(E_{i+1}\setminus E_i) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{i=1}^{n}(E_{i+1}\setminus E_i \cup E_1) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

$\square$

משפט. יהי X,Σ,μ מרחב מידה. אם $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ סדרה לא עולה (לפי הכלה), ומתקיים $\mu(E_1) < \infty$ אזי

$$\mu(\bigcap_{i=1}^{n} E_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(E_i)$$

מן הסתם הדרישה של $\mu(E_1) < \infty$ הכרחית לקיום המשפט (אחרת לא היינו אפילו מדברים עליה). בהמשך נראה דוגמא שאכן תנאי זה הכרחי. בפועל, לאו דווקא האיבר הראשון של הסדרה חייב לקיים את זה, אלא איבר כלשהו.

הוכחה. נסמן $E = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} E_i$. הסדרה הבאה $\{E_1 \setminus E_i\}_{n=1}^{\infty}$ אינה יורדת. נרשום:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_1\setminus E_i) = E_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = E_1 \setminus E$$

לכן, מהמשפט הקודם:

$$\mu(E_1\setminus E) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_1\setminus E_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(E_i\setminus E_n) \tag{1}$$

נבצע חישוב אחר:

$$E_1 = E \cup (E_1 \setminus E)$$

$$E_1 = E_i \cup (E_1 \setminus E_i) \text{ לכל } i$$

מכאן,

$$\mu(E_1) = \mu(E) + \mu(E_1 \setminus E)$$

$$\mu(E_1) = \mu(E_n) + \mu(E_1 \setminus E_n) \text{ לכל } i$$

מהדרישה, כל המספרים סופיים. נוכל להעביר אגפים ונקבל:

$$\mu(E_1 \setminus E) = \mu(E) - \mu(E_1)$$

$$\mu(E_1 \setminus E_i) = \mu(E_i) - \mu(E_1) \text{ לכל } i$$

נציב ב- (1) ונקבל:

$$\mu(E_1) - \mu(E) = \lim_{i\to\infty}(\mu(E_1) - \mu(E_i)) = \mu(E_1) - \lim_{i\to\infty}\mu(E_i)$$

$$\mu(E) = \lim_{i\to\infty}\mu(E_i)$$

$\square$

דוגמא. עבור $\mathbb{R}$ ו- Σ אלגברה-σ של כל הקבוצות המדידות לבג, הצמצום של m^* על Σ נקרא המידה של לבג.

כבר ראינו קבוצות מדידות לבג: $\mathbb{R}, \varnothing$, קבוצות ממידה אפס. קבוצת קנטור היא ממידה אפס, לכן מדידה לפי לבג. בפרט, גם כל תת־קבוצה שלה היא מדידה. יש לה 2^c תת־קבוצות, כלומר יש לפחות 2^c קבוצות מדידות. מצד שני ל-$\mathbb{R}$ יש 2^c תת־קבוצות סך־הכול, לכן יש בדיוק 2^c קבוצות מדידות לבג.

כעת, נרצה להראות שכל תת־קבוצה פתוחה של $\mathbb{R}$ היא מדידה לפי לבג.

למה. יהי $a \in \mathbb{R}$. הקרן (a, ∞) היא קבוצה מדידה לפי לבג.

הוכחה. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ כלשהי. רוצים להראות:

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap (a, \infty)) + m^*(A \cap (-\infty, a])$$

נסמן: $A_1 = A \cap (a, \infty), \quad A_2 = A \cap (-\infty, a]$
נניח $m^*(A) \leq \infty$.
יהי $\varepsilon > 0$ כלשהו. מתכונות המידה החיצונית של לבג, קיים קטעים פתוחים $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ המקיימים $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ וכן

$$\sum_{i=1}^{\infty} l(I_i) < m^*(A) + \varepsilon$$

נסמן: $I_n^1 := I_n \cap (a,\infty)$, $I_n^2 := I_n \cap (-\infty, a]$. אלה קטעים (ייתכן ריקים).
בוודאי $I_n = I_n^1 \cup I_n^2$ איחוד זר. לכן:

$$l(I_n) = l(I_n^1) + l(I_n^2)$$

כמו כן, $A_1 \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^1$, $A_2 \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^2$ לכן,

$$m^*(A_1) + m^*(A_2) \leq m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^1) + m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^2) \leq$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n^1) + \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n^2) = \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n^1) + \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n^2) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (l(I_n^1) + l(I_n^2)) = \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < m^*(A) + \varepsilon$$

$\square$

נעצור לרגע. סדרת הקרניים $\{(n,\infty)\}_{n=1}^{\infty}$ לא עולה (ולמעשה יורדת ממש), כל הקרניים מדידות וכן, $\bigcap_{n=1}^{\infty} (n,\infty) = \varnothing$, וראינו $m(\varnothing) = 0$.
מצד שני, $\lim_{n\to\infty} m(n,\infty) = \infty$ כגבול של סדרה קבועה של ∞. כלומר קיבלנו דוגמא שבה השוויון לא מתקיים $\bigcap_{n=1}^{\infty} (n,\infty) \neq \lim_{n\to\infty} m(n,\infty)$. זאת הוכחה שהתנאי $m(E_1) < \infty$ שדרשנו במשפט הוא הכרחי.

משפט. כל תת־קבוצה פתוחה של $\mathbb{R}$ היא מדידה לפי לבג.

הוכחה. מהלמה נסיק כי כל $(-\infty, a]$ מדידה לפי לבג (כי משלימה של קבוצה מדידה לפי לבג). נוסף על כך, $(-\infty, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, b - \frac{1}{n}]$ היא מדידה לפי לבג (כי איחוד בן־מניה של קבוצות מדידות).
לפיכך כל $(a,b) = (a,\infty) \cap (-\infty, b)$ הוא קבוצה מדידה לפי לבג.
כל תת־קבוצה של $\mathbb{R}$ היא איחוד בן־מניה של קטעים פתוחים, זרים שתיים־שתיים. מכאן כל קבוצה פתוחה מדידה לפי לבג.
רגע, רגע. מי אמר בכלל שכל קבוצה פתוחה היא איחוד בן־מניה של קטעים פתוחים וגם זרים שתיים־שתיים? למען הסר ספק נראה גם את זה.
תהי $O \neq \varnothing$ קבוצה פתוחה (עבור $\varnothing$ כל כיסוי פתוח יתאים). יהיו $x, y \in O$. נאמר כי הנקודות x, y שקולות, ונסמן $x \sim y$ אם קיים קטע פתוח I המקיים $x, y \in I \subseteq O$. זהו יחס שקילות וקורא שזוכר חלקים מהקורס "מתמטיקה בדידה" יכול לנסות כוחו ולהוכיח.
בכל אופן, כל מחלקת שקילות היא קטע פתוח. מהגדרתן, המחלקות זרות ואיחודן הוא הקבוצה O כולה. אכן קיבלנו ש־O היא איחוד קטעים פתוחים, זרים שתיים־שתיים.
מדוע המשפחה הזאת היא בכלל בת־מניה? נתאים לכל מחלקת שקילות מספר רציונלי שמוכל בה. קיבלנו פונקציה חד־חד ערכית ממשפחת הקטעים הפתוחים ל־$\mathbb{Q}$. לכן, המשפחה לכל היותר בת־מניה. $\square$

תוצאה. כל תת־קבוצה סגורה של $\mathbb{R}$ היא מדידה לפי לבג (המשלים שלה מדיד לפי לבג).

קבוצות בורליות

תהי X קבוצה $F \subseteq P(X)$. קיימת אלגברה־σ של תת־קבוצות של X המכילה את F.
מדוע? כי $P(X)$ עצמה היא אלגברה־σ.
נוסף על כך, חיתוך של אלגברות־σ הוא אלגברה־σ, בפרט חיתוך כל האלגברות־σ המכילות את F היא אלגברה־σ. היא נקראת האלגברה־σ הנוצרת על ידי F.

תהי $\Sigma \subseteq \mathbb{R}$ אלגברה־σ של כל תת־הקבוצות המדידות לפי לבג.
כעת, תהי $\mathcal{B}$ אלגברה־σ הנוצרת על ידי תת־הקבוצות הפתוחות של $\mathbb{R}$. $E \in \mathcal{B}$ נקראת תת־קבוצה בורלית של $\mathbb{R}$.
הקבוצות הבורליות מי הן? כל הקבוצות הפתוחות, כל הקטעים, כל הקבוצות הסגורות, כל ה־G_δ, כל ה־F_σ, כל איחוד בן־מניה של קבוצות G_δ (המסומן $G_{\sigma\delta}$), כל חיתוך בן־מניה של קבוצות F_σ (המסומן $F_{\delta\sigma}$), וכו'.
$card(\mathcal{B}) = c$ ו־ $card(\Sigma) = 2^c$ מה שאומר שיש המון קבוצות מדידות לבג שאינן בורליות.
אבל כמובן כל קבוצה בורלית מדידה לפי לבג.

משפט. תהי $E \subseteq \mathbb{R}$. התנאים הבאים שקולים:

1. E מדידה לפי לבג.
2. לכל $\varepsilon > 0$ קיימת O פתוחה המקיימת $E \subseteq O$ ו־ $m^*(O \setminus E) < \varepsilon$.
3. לכל $\varepsilon > 0$ קיימת F סגורה המקיימת $F \subseteq E$ ו־ $m^*(E \setminus F) < \varepsilon$.
4. קיימת קבוצה G_δ, G נאמר, המקיימת $E \subseteq G$ ו־ $m^*(G \setminus E) = 0$
5. קיימת קבוצה F_σ, F נאמר, המקיימת $F \subseteq E$ ו־ $m^*(E \setminus F) = 0$

הוכחה. נתחיל מלהוכיח $1 \Leftarrow 4 \Leftarrow 2 \Leftarrow 1$.
$2 \Leftarrow 1$:
נניח $m^*(E) = m(E) < \infty$ (הקבוצה מדידה על פי ההנחה, לכן המידה החיצונית היא המידה). יהי $\varepsilon > 0$. מלמה שהוכחנו בשיעור הראשון קיימת $E \subseteq O$ תת־קבוצה פתוחה המקיימת $m(O) < m(E) + \varepsilon$ (ראינו עבור מידה חיצונית, אבל O פתוחה, לכן מדידה, לכן מותר לכתוב מידה במקום מידה חיצונית).
נוכל לכתוב $O = E \cup (O \setminus E)$ איחוד זר. m מידה והאיחוד זר, משום כך,

$$m(O) = m(E) + m(O \setminus E)$$

המידה של E סופית על פי ההנחה, על כך נעביר אגפים ונקבל את הדרוש

$$m(O \setminus E) = m(O) - m(E) < \varepsilon$$

נבדוק מה קורה כאשר $m(E) = \infty$.
נגדיר $E_n := E \cap [n, n+1)$ לכל $n \in \mathbb{Z}$. מתקיים: $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ וכן, $m(E_n) \leq 1$.
מלמה מהשיעור הראשון, לכל $n \in \mathbb{Z}$ קיימת $E_n \subseteq O_n$ קבוצה פתוחה שמקיימת

$$m(O_n \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2^{|n|+2}}$$

נגדיר $O := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} O_n$ קבוצה פתוחה. מתקיים $O \setminus E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (O_n \setminus E_n)$. נסיק:

$$m(O \setminus E) \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} m(O_n \setminus E_n) < \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\varepsilon}{2^{|n|+2}} < \varepsilon$$

$2 \Leftarrow 4$:
לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת O_n פתוחה המקיימת $E \subseteq O_n$ וכן $m^*(O_n \setminus E) < \frac{1}{n}$.
נגדיר $G := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ קבוצת G_δ. בוודאי $E \subseteq G$. לכן, לכל $n \in \mathbb{N}$ $G \setminus E \subseteq O_n \setminus E$.
נקבל שלכל $n \in \mathbb{N}$

$$m(O \setminus E) \leq m(O_n \setminus E) \leq \frac{1}{n}$$

$4 \Leftarrow 1$: תהי G כנ"ל. G קבוצה מדידה (כי קבוצה G_δ). גם $G \setminus E$ מדידה, כי מוכלת ב־G.
נכתוב $E = G \setminus (G \setminus E)$ הפרש קבוצות מדידות, לכן גם E קבוצה מדידה.

נסיים את ההוכחה בשיעור הבאה.