פונקציות ממשיות - הרצאה 26

18.1.11

(X,Σ,μ) מרחב מידה, μ מידה שלמה.
עבור p סופי דיברנו על ספרביליות של $l_p, L_p(\mathbb{R})$.

הערה. לא כל מרחבי L_p הם ספרביליים. זה צלוי במרחב. לדוגמא, $card(X) > \aleph_0$, עם מידת הספירה. $L_p(X, P(X), \mu$ אינו ספרבילי.

$$\delta_{x_0}(x) := \begin{cases} 1 & x = x_0 \\ 0 & x \neq x_0 \end{cases}$$

ניקח $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$.

$$\|\delta_{x_1} - \delta_{x_2}\|_p = (\int_X |\delta_{x_1} - \delta_{x_2})|^p d\mu^{1/p} = 2^{1/p}$$

קיבלנו אוסף לא בן־מניה של נקודות במרחב כך שהמרחק בין כל שני איברים שונים הוא קבוע.
כעת ניקח סביב כל δ_{x_1} כדור ברדיוס $2^{1/p-1}$. כל שני כדורים כאלה לא נחתכים ואז קבוצה צפופה צריכה להיות עשירה מספיק כדי להכיל נקודה מכל כדור לכן עוצמת הקבוצה הצפופה גדולה מ- $\aleph_0$

הגדרה. במרחב מידה (X,Σ,μ) $E \in \Sigma$ נקראת אטום אם $\mu(E) > 0$ ולכל $F \in \Sigma$ $\varnothing \neq F \subseteq E$, $\mu(F) = \mu(E)$

המרחב יכול להיות סופי בלי אף אטום. אפשר להגדיר מידת מכפלה על $\mathbb{R}^n$ כאשר יש משפחה אינסופית של גורמים בתנאי שמרחב המידה של כל גורם סופי.
נניח $(X_\alpha, \Sigma_\alpha, \mu_\alpha)$ כך ש- $\mu_\alpha(X_\alpha) = 1$
$[0,1]^c$ מרחב מידה ללא אטומים. גם $\mathbb{R}$ הוא ללא אטומים.
אם $c \leq \aleph_0$ המרחב $L_p([0,1]^c)$ ספרבילי ואם $c > \aleph_0$ המרחב $L_p([0,1]^c)$ אינו ספרבילי.
איך נוכיח כי $L_p(\mathbb{R}^n$ ספרבילי?
נראה את תוכנית ההוכחה ולא את ההוכחה המלאה.

למי שמתעניינים - זה לא לבחינה.

נוכיח באינדוקציה:

טענה. $f \in L_p(\mathbb{R}^2)$, $\varepsilon > 0$ אזי קיימות $\{f_k\}_{k=1}^m, \{g_k\}_{k=1}^m$ ב- $L_p(\mathbb{R})$

$$\varphi(x,y) := \sum_{k=1}^m f_k(x) g_k(y)$$

$$\|f-\varphi\|_p < \varepsilon$$

ברגע שנוכיח את הטענה הכל ברור: אפשר להחריף את הטענה ולבחור קבוצה צפופה בת־מניה של $L_p(\mathbb{R}$ ((כי ספרבילי). כעת אפשר לבחור פונקציות $\{\hat{f}_k\}_{k=1}^m, \{\hat{g}_k\}_{k=1}^m$ ב־ L כך ש־ $\|\hat{f}_k - f_k\| \le \varepsilon/m$, $\|\hat{g}_k - g_k\| \le \varepsilon/m$
ונגדיר

$$\hat{\varphi(x,y)} := \sum_{k=1}^m \hat{f}_k(x)\hat{g}_k(y)$$

$$\|\varphi-\hat{\varphi}\|_p < \varepsilon$$

אבל משפחת פונקציות הקובע היא בת מניה ולכן המרחב ספרבילי.
איך נוכיח את הטענה?
עפ"י אחד התרגילים קיימת ψ פשוטה המתאפסת מחוץ לקבוצה ממידה סופית המקיימת

$$\|f-\psi\|_p < \eta_1$$

$$\psi = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{E_i}$$

$E_i \subseteq mathbbR$ בעלת מידה סופית.
כעת ננסה לקרב באופן הנ"ל את χ_{E_i} ואז הכל יסתדר.
כדי להגדיר את המידה הדו־ממדית השתמשנו ב־ R - איחודים סופים של מלבנים מדידים זרים זה לזה. אחד הדברים שהוכחנו הוא שלכל קבוצה מדידה יש קבוצה F ב־ $R_{\sigma\delta}$ כך ש־ $F \subseteq E$ וכן $m_2(F\setminus E)=0$.
במילים אחרות $m_2(F)=m_2(E)$
לכן נתקמד ב־ F. לכן במקום כל E_i אפשר לקחת קבוצה של $R_{\sigma\delta}$ כי באותה מחלקה של L_p.

$$F=\bigcap G_n, G_n \in R_\sigma$$

ואז לכל F כנ"ל קיימת $G\in R_\sigma$ כך ש־ $m(G\setminus F) < \eta_2$
לכן,

$$\|\chi_G - \chi_F\|_p < \dots$$

לכן נתמקד ב־ G.

$$G=\bigcup H_m$$

$H_m \in R$ מלבנים מדידים זרים זה לזה.

$$\|\chi_G - \sum_1^R \chi_{H_m}\| < \eta_3$$

$$\infty > m_2(G) = \sum m_2(H_m)$$

H מלבן מדיד לכן $H = L \times M$

$$\chi_H(x,y) = \chi_L(x)\chi_M(y)$$

בדיוק מהצורה הנדרשת.