פונקציות ממשיות - הרצאה 25

16.1.11

(X,Σ,μ) מרחב מידה, μ מידה שלמה.
L_∞ שלם.
$\{f_n\}$ סדרת קושי ב- L_∞.

$$A_{mn} := \{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| > \|f_m - f_m\|_\infty\}$$

מתקיים: $\forall m,n \in \mathbb{N} \mu(A_{mn} = 0$

$$A := \bigcup_{m,n} A_{mn}$$

$$\mu(A) = 0$$

$$\forall m,n \in \mathbb{N} X \setminus A \subseteq X \setminus A_{mn} \Rightarrow$$

אם $x \in X \setminus A$ אזי

$$|f_m(x) - f_n(x)| \le \|f_m - f_m\|_\infty$$

נשתמש בעובדה שזאת סדרת קושי:
יהי $\varepsilon > 0$ קיים $N(\varepsilon)$ בעל התכונה:

$$m,n > N(\varepsilon) \Rightarrow \|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon$$

$$m,n > N(\varepsilon) \Rightarrow |f_m - f_n \ \ < \varepsilon$$

$$\forall x \in X \setminus A$$

אם $x \in X \setminus A$ $\{f_n(x)\}$ היא סדרת קושי של מספרים.

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x), \ \ x \in X \setminus A$$

f מדידה כגבול כב"מ של פונקציות מדידות (המידה μ שלמה).
לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N(\varepsilon)$ המקיים

$$m > N(\varepsilon) \Rightarrow |f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in X \setminus A$$

ניקח $\varepsilon = 1$

$$m > N(1) \Rightarrow |f_m(x) - f(x)| \leq 1 \quad \forall x \in X \setminus A$$

$$|f(x)| - |f_n(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| \leq 1$$

$$|f(x)| \leq 1 - |f_n(x)|, \quad \forall x \in X \setminus A$$

ניקח $m_1 = N(1) + 1$

$$|f(x)| \leq 1 + |f_{m_1}|, \forall x \in X \setminus A$$

$f_{m_1} \in L_\infty$. קיימת B $\mu(B) = 0$

$$|f_{m_1}(x)| \leq \|f_{m_1}\|_\infty \;\; \forall x \in X \setminus B$$

$$\forall x \in X \setminus (A \cup B) \Rightarrow |f(x)| \leq 1 + \|f_{m_1}\|_\infty$$

$$\mu(A \cup B) = 0$$

מצאנו כי $f \in L_\infty$.
$\forall \varepsilon > 0$ קיים $N(\varepsilon)$ המקיים עבור $m > N(\varepsilon)$:

$$\|f - f_m\|_\infty \leq \sup_{x \in X \setminus A} |f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

לכן, $\{f_m\} \to f$ ב־ L_∞.
מרחב נורמי שלם נקרא מרחב באנאך.
נדבר על תכונה אחרת של מרחבים נורמיים. ספרביליות.

הגדרה. מרחב נורמה E נקרא ספרבילי אם קיימת בו תת־קבוצה צפופה בת מניה.

תזכורת: כדור פתוח סביב $x_0 \in E$ בעל רדיוס r,

$$\{x \in E : \|x - x_0\| < r\}$$

נאמר כי A צפופה במרחב אם החיתוך של A עם כל כדור פתוח אינו ריק.
לדוגמא, ב־ $\mathbb{R}$ הוא ספרבילי כי קבוצת הרציונליים צפופה בו.
יש מרחבי L_p ספרביליים ומרחבי L_p שאינם ספרביליים.

דוגמא.

$$X_n = \{1, 2, 3 \ldots, n\}$$

על כל תת־הקבוצות של X_n ניקח את מידת הספירה μ_n.
המרחב $l_p(X_n, P(X_n), \mu_n)$ הוא ספרבילי עבור כל $1 \le p \le \infty$.
ניקח את $\mathbb{N}$ עם מידת הספירה μ.
$(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \mu$ כבר הזכרנו שמרחבי l_p שונים זה מזה כקבוצות. עבור $1 \le p_1 < p_2 \le \infty$
$l_{p_1} \subsetneqq l_{p_2}$
אם $1 \le p < \infty$ אז l_p ספרבילי.
ל־ p נתון לוקחים:

$$A_p := \{x \in l_p : \forall n, \text{רציונלי} x(n) \exists k_x \in \mathbb{N} \text{בעל התכונה} n > k_x \Rightarrow x(n) = 0\}$$

בת מניה כי

$$A_p \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n$$

l^∞ אינו ספרבילי. מרחב כל הסדרות הסקלריות החסומות. ניקח $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{N}$ $E_1 \ne E_2$.

$$\chi_{E_i}(n) = \begin{cases} 0, & n \notin E_i \\ 1, & n \in E_i \end{cases}$$

$$\chi_{E_1}, \chi_{E_2} \in l_\infty$$

$$\|\chi_{E_1} \setminus \chi_{E_2}\|_\infty = 1$$

עבור $|\chi_{E_1}(n) - \chi_{E_2}(n)|$ בגלל שהקבוצות שונות יש נקודה עבורה ההפרש הוא 1 והוא לא יכול לעבור את 1.

$$\aleph = cardP(\mathbb{N}) = ard\{\chi_E\}_{E \subseteq \mathbb{N}} \subseteq l_\infty$$

כדור ברדיוס חצי סביב χ_E:

$$C(\chi_E) = \{x \in l_\infty : \|x - \chi_E\| < 1/2\}$$

$$C(\chi_{E_1}) \cap C(\chi_{E_2}) = \varnothing$$

כי אחרת המרחק בין המרכזים היה פחות מ־1.
אם $A \subseteq l_\infty$ צפופה ב־ l_∞ אז יש לה נקודה בשני הכדורים הנ"ל. אבל ראינו שהם זרים.

$$x_E \in A \cap C(\chi_E) \ne \varnothing$$

$$E_1 \neq E_2 \Rightarrow x_{E_1} \neq x_{E_2}$$

$$\{x_E : E \subseteq \mathbb{N}\} \subseteq A$$

$$\aleph = card\{x_E : E \subseteq \mathbb{N}\}$$

נדבר על $(\mathbb{R}, \Sigma, m)$.

משפט. $L_p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$ ספרבילי.

הוכחה. L קבוצת כל הפונקציות המקבלות רק ערכים רציונליים בעלות התכונה הבאה: לכל $f \in L$ קיימת סדרה סופית של מספרים רציונליים

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_n < b_n$$

כך ש-f מתאפסת מחוץ ל- $\bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i)$ והיא קבועה על כל (a_i, b_i). $L \subseteq L_p$ בת מניה.
נראה כי היא גם צפופה ב- L_p.
ניקח $f \in L_1$, $\varepsilon > 0$.
קיימת φ_1 פונקציה פשוטה המתאפסת מחוץ לקבוצה בעלת מידה סופית ומקיימת

$$\|f - \varphi_1\|_p \leq \varepsilon/2$$

$$\varphi_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$$

פונקציה פשוטה כאשר $\{E_i\}$ מדידות בעלות מידה סופית וזרות בזוגות. קיימות G_i, $1 \leq i \leq n$ פתוחות המקיימות $E_i \subseteq G_i$,

$$m(G_i \setminus E_i) < (\frac{\varepsilon}{4nM})^p$$

כאשר,

$$M := \sup_{1 \leq i \leq n} |alpha_i| + 1$$

$$\varphi_2 := \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$$

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_p \leq \sum |\alpha_i| \|\chi_{G_i} - \chi_{E_i}\|_p = \sum |\alpha_i| \|\chi_{G_i \setminus E_i}\|_p \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \cdot \frac{\varepsilon}{4nM} < \varepsilon/4$$

כעת, לכל $1 \leq i \leq n$ $m(G_i) < \infty$

$$G_i := \bigcup_{k=1}^{\infty} (\alpha_i^k, \beta_i^k)$$

$\{(\alpha_i^k, \beta_i^k)\}_{k=1}^{\infty}$ זרים זה לזה.

$$\sum_k (\beta_i^k - \alpha_i^k) = m(G_i) < \infty$$

$$\exists l_i \ \sum_{k>l_i} (\beta_i^k - \alpha_i^k) < \frac{\varepsilon}{8nM})^p$$

$$\hat{G}_i := \bigcup_{i=1}^{l_i} (\alpha_i^k, \beta_i^k)$$

$$\varphi_3 := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{\hat{G}_i}$$

$$\|\varphi_2 - \varphi_3\|_p \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \|\chi_{E_i} \setminus \chi_{\hat{G}_i}\|_p \leq nm\varepsilon/8nm = \varepsilon/8$$

$$\|f - \varphi_1\|_p < \varepsilon/2, \|varphi_1 - \varphi_2\| < \varepsilon/4, \|\varphi_2 - \varphi_3\|_p < \varepsilon/8$$

נבחר r_i^k, s_i^k רציונליים המקיימים:

$$\alpha_i^k < r_i^k < s_i^k < \beta_i^k$$

$$\beta_i^k - s_i^k, r_i^k - \alpha_i^k < \frac{1}{2}(\frac{\varepsilon}{16nMl_i})^p$$

$$1 \leq i \leq n$$

$$1 \leq k \leq l_i$$

$$U_i := \bigcup_{k=1}^{l_i} (r_i^k, s_i^k) \ \ 1 \leq i \leq n$$

$$\varphi_4 := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{U_i}$$

$$\|\varphi_3 - \varphi_4\|_p < \varepsilon/16$$

נבחר $\rho_i \in \mathbb{Q}$

$$|\alpha_i - \rho_i| < \frac{\varepsilon}{32 \max_{1 \le i \le n} m(u_i)^{1/p}}$$

$$\varphi_5 := \sum_{i=1}^{n} \rho_i \chi_{U_i}$$

$$\|\varphi_4 - \varphi_5\|_p = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - r_i| \|\chi_{U_i}\|_p < \varepsilon/32$$

$$\varphi_5 \in L$$

$\square$

כתוצאה מהמפשט אם ניקח $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \in \Sigma$, $m(E) > 0$, אז $L_p(E)$ $1 \le p < \infty$ ספרבילי. כי יש העתקה $L_p(\mathbb{R}) \overset{\text{על}}{\to} L_p(E)$ העתקת הצמצום.
$L_\infty(E)$ אינו ספרבילי. מדוע? מתרגיל שאומר ש-

$$0 < \beta < \alpha \Rightarrow \exists E_\beta \subseteq E, m(E_\beta) = \beta$$

ועבור $\beta_1 \neq \beta_2$

$$\|\chi_{E_{\beta_1}} - \chi_{E_{\beta_2}}\|_\infty = \|\chi_{E_{\beta_1} \triangle E_{beta_2}}\|_\infty = 1$$