פונקציות ממשיות ־ הרצאה 24

11.1.11

(X,Σ,μ) מרחב מידה שלמה. $1 \le p \le \infty$
הוכחנו כי המרחבים L_p הם מרחבים נורמיים.
מביניהם הכי מעניינים הם L_1, L_2, L_∞. בתוך L_2 יש אפילו מכפלה פנימית:
עבור, $f,g \in L_2$

$$\langle f,g\rangle := \int_X fgd\mu$$

כשיש נורמה אז יש גם מטריקה. המחרק בין שתי פונקציות הוא נרומת ההפרש ביניהם.
תכונה מאוד חשובה של מרחבים מטריים היא היותו מרחב מטרי שלם.

הגדרה. נניח (X,d) מרחב מטרי. סדרה של איברים $\{x_n\} \subseteq X$ נקראת סדרת קושי אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $m,n > N$ מתקיים $d(x_n,x_m) < \varepsilon$.

קל לבדוק באמצעות אי־שוויון המשולש כי כל סדרת המתכנסת במרחב מטרי הינה סדרת קושי. אך לא תמיד להפך. למשל רציונליים עם המרחק הרגיל.

הגדרה. מרחב מטרי נקרא שלם אם כל סדרת קושי מתכנסת לאיבר של המרחב.

אפשר לשכן מרחב מטרי נתון באופן קנוני למרחב מטרי שלם גדול יותר. בדיוק כמו הרציונליים לממשיים.
נרצה להראות שמרחבים L_p הנ"ל הם מרחבים שלמים.

למה. תהי $\{x_n\}$ סדרת קושי במרחב מטרי (X,d). אם קיימת תת־סדרה $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ המתכנסת ל־ $x \in X$ אזי $\{x_n\}$ מתכנסת ל־ x.

הוכחה. יהי $\varepsilon > 0$ קיים N בעל התכונה $m,n > N \Rightarrow d(x_n,x_m) < \varepsilon$.
קיים מספר טבעי L בעל התכונה

$$k > L \Rightarrow d(x_{n_k},x) < \varepsilon$$

נבחר $k > L$ וגם $n_k > N$.
אם $m > N$ מתקיים

$$d(x,x_m) \le d(x,x_{n_{k_0}}) + d(x_{n_{k_0}},x_m) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

ולכן,

$$x_m \to x$$

□

משפט. L_p, $1 \le p \le \infty$ הוא שלם.

הוכחה. $1 \le p < \infty$ תהי $\{f\}$ סדרת קושי ב־ L_p.
תחילה נוכיח כי זאת סדרת קושי במידה.

הגדרה. $\{f_n\}$ סדרת קושי במידה. לכל $\varepsilon > 0$ וכל $\alpha > 0$ קיים N בעל התכונה:

$$m,n > N \Rightarrow \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \alpha\}) < \varepsilon$$

טענה. $\{f\}$ היא סדרת קושי במידה.

הוכחה. יהיו $\varepsilon > 0, \alpha > 0$. קיים N בעל התכונה

$$m,n > N \Rightarrow \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon^{1/p}\alpha$$

נניח $m,n > N$. קבענו את p לכן למען הקיצור נפסיק לכתוב שזאת נורמה של p. אבל כולם זוכרים.

$$\alpha^p \mu(\{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| > \alpha\}) \le$$
$$\le \int\limits_{\{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| > \alpha\}} |f_m - f_n|^p \le \int_X |f_m - f_n|^p d\mu = \|f_m - f_n\|^p < \varepsilon \cdot \alpha^p$$

כלומר,

$$\mu(\{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| > \alpha\}) < \varepsilon$$

$\square$

מתרגיל בית, $\{f_n\}$ מתכנסת במידה לפונציה מדידה f.
קיימת תת־סדרה $\{f_{n_k}\}$ המתכנסת כב"מ ל־ f.
$\{f_{n_k}\}$ היא סדרת קושי (כי תת־סדרה של סדרת קושי). עבור $\varepsilon > 0$ קיים N_1 המקיים

$$k, l \Rightarrow \|f_{n_l} - f_{n_k}\| < \varepsilon$$

או באופן שקול לחלוטין,

$$\int_X |f_{n_l} - f_{n_k}|^p d\mu < \varepsilon^p$$

יהי $k > N_1$

$$\{|f_{n_l}| - |f_{n_k}|^p\}_{l=1}^{\infty} \overset{a.e.}{\to} |f - f_{n_k}|^p$$

עפ"י הלמה של פטו:

$$\int_X |f - f_{n_k}|^p d\mu \le \liminf_l \int_X |f_{n_l} - f_{n_k}|^p d\mu \le \varepsilon^p$$

לכן,

$$\int_X |f - f_{n_k}|^p d\mu \leq \varepsilon^p$$

מכך אנחנו למדים כי $f - f_{n_k} \in L_p$. לכן, גם $f \in L_p$. אבל לא רק זאת.

$$\|f - f_{n_k}\| \leq \varepsilon$$

כלומר, הסדרה $\{f_{n_k}\}$ מתכנסת ל- f ב- L_p.
ולבסוף, $\{f_n\}$ מתכנסת ל- f ב- L_p.
את ההוכחה עבור $p = \infty$ נשלים בשיעור הבא. $\square$