פונקציות ממשיות - הרצאה 23

9.1.11

(X,Σ,μ) מרחב מידה.
נרצה להגדיר נורמה על הפונקציות. $f\in\mathcal{L}_P$ מדידה ו- $\int_X |f|^p d\mu<\infty$

$$(\int_X |f|^p d\mu)^{1/p}=0 \Leftrightarrow \int |f|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f=0 \text{ כב"מ}$$

ייתכן שהפונקציה שווה ל-0 כמעט בכל מקום אבל לא ניתן לכתוב $\int |f|^p d\mu$. כדי להמנע מזה נעבוד במרחב מידה מידה שלם.
נאמר כי $f_1\sim f_2$ אם $f_1-f_2=0$ כב"מ. ואז $\int |f_1|^p d\mu=\int |f_2|^p d\mu$.
לחילופין, באופן שקול, אפשר להתסכל על תת־מרחב של L_p של כל הפונקציות השוות לאפס כב"מ $L:=\{f: f=0 \text{ כב"מ}\}$. זהו מרחב לינארי ונתבונן ב- $L_p(X,\Sigma,\mu)=\mathcal{L}_p\diagdown L$. זהו מרחב של מחלקות שקילות.
אנחנו לא נאמר כל פעם מחלקת שקילות אלא נאמר רק פונקציה, כאילו מכל מחלקת שקילות בוחרים נציג.
כעת אם נגדיר

$$\|f\|_p:=(\int_x |f|^p d\mu)^{1/p}$$

$$\|f\|=0\Leftrightarrow f=0$$

לפני שנוכיח את אי־שוויון המשולש נדון במרחב נורמה אחר.

הגדרה. פונקציה מדידה f נקראת חסומה עיקרית אם קיימת $E\subseteq X$ $\mu(E)=0$ כך ש-f חסומה על $X\setminus E$.

סימון $\mathcal{L}_\infty$ מרחב כל הפונקציות החסומות עיקרית. זה מרחב לינארי.
על המרחב הזה נרצה להגדיר נורמה:

$$\|f\|_\infty=\inf\Big\{\sup\{|f(x)|:x\in X\setminus E\},\mu(E)=0\Big\}$$

בגלל שהפונקציות חסומות עיקרית המספר הזה סופי.
קיימת $A_f\in\Sigma$ בכלת מידה $\mu(A_f)=0$ עבורה

$$\|f\|_\infty=\sup\{|f(x)|:x\in X\setminus A_f\}$$

לכל $n\in\mathbb{N}$ קיימת $E_n\subseteq X$ $\mu(E_n)=0$ עבורה

$$\|f\|_\infty\le\sup\{|f(x)|:x\in X\setminus E_n\}<\|f\|_\infty+\frac{1}{n}$$

נגדיר

$$A_f := \bigcup_n E_n, \mu(A_f) = 0$$

$$\|f\|_\infty \leq \sup\{|f(x)| : x \in X \setminus A_f\} \leq \sup\{|f(x)| : x \in X \setminus E_n\} < \|f\|_\infty + \frac{1}{n}$$

וזה לכל n.
לכן,

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X \setminus A_f\}$$

כעת, כתגריל:

$$\|f_1 + f_2\|_\infty \leq \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty$$

$$\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ כב"מ}$$

אותה הבעיה כמו למעלה. נשתמש באותו הפתרון:

$$L_\infty = \mathcal{L}_\infty \diagdown L$$

ושוב נדבר כאילו על נציגים כאשר בפועל אנחנו זוכרים שאלה מחלקות שקילות.
נוכיח את אי־שוויון המשולש עבור L_p כאשר p סופית.
עבור $f_1, f_2 \in L$,

$$\int |f_1 + f_2| d\mu \leq \int |f_1| d\mu + \int |f_2| d\mu$$

למה. יהיו $\alpha > 0, \beta > 0$ ו־ $0 < \lambda < 1$ אזי,

$$\alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta$$

שוויון מתקיים $\Leftrightarrow$ $\alpha = \beta$.

הוכחה. משתמשים בפונקציה

$$\varphi(t) := 1 - \lambda + \lambda t - t^\lambda, t > 0$$

נחפש נקודות אקסטרמום.

$$\varphi'(t) = \lambda - \lambda t^{\lambda-1}$$

$$\varphi'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$0<t<1 \Rightarrow \varphi'(t)<0$$

$$t>1 \Rightarrow \varphi'(t)>0$$

כלומר לפונקציה יש מינימום ב־1. כלומר

$$1-\lambda+\lambda t-t^{\lambda}\geq 0$$

שוויון מתקיים $\Leftrightarrow$ $t=1$.
נציב $t=\frac{\alpha}{\beta}$.

$$1-\lambda+\lambda\frac{\alpha}{\beta}\geq\frac{\alpha^{\lambda}}{\beta^{\lambda}}$$

$$(1-\lambda)\beta+\lambda\alpha\geq\alpha^{\lambda}\beta^{1-\lambda}$$

$\square$

משפט. אי שוויון הולדר
יהי $1\leq p\leq\infty$, יהי $q=1$ אם $p=\infty$, $q=\infty$ אם $p=1$ ו־ $q=\frac{p}{p-1}$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$
אם $1<p<\infty$, $(1<q<\infty)$
אם $f\in L_p$, $g\in L_q$ אז fg אינטגרבילית ו־

$$\int_X|fg|d\mu\leq\|f\|_p\|g\|_q$$

הוכחה. $p=1,q=\infty\exists A\subseteq X\mu(A)=0$ המקיימת $\|g\|_{\infty}=\sup\{|g(x)|:x\in X\setminus A\}$

$$\int_X|fg|d\mu\leq\int_{X\setminus A}|fg|d\mu\leq\int_{X\setminus A}\|g\|_{\infty}|f(x)|d\mu(x)=$$
$$=\|g\|_{\infty}\int_X|f(x)|d\mu=\|f\|_1\|g\|_{\infty}$$

באופן דומה עבור $p=\infty,q=1$.
כעת, $1<p<\infty$. אפשר להניח עבור $f\neq 0,g\neq 0$.
יהיו $x\in X$, $\lambda=\frac{1}{p}$, $1-\lambda=\frac{1}{q}$, $\alpha=\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}$, $\beta=\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$
נציב באי־שוויון:

$$\forall x\in X\quad\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\cdot\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\leq\frac{1}{p}\cdot\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}+\frac{1}{q}\cdot\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$$

עפ"י ההנחה באגף ימין יש פונקציה אינטגרבילית ולכן גם אגף שמאל אינטגרבילי. $\Rightarrow fg\in L_1$.

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x) \le$$
$$\le \frac{1}{p\|f\|_p^p}\int_X |f(x)|^p d\mu(x) + \frac{1}{q\|g\|_q^q}\int_X |g(x)|^q d\mu(x) = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$$

$\square$

הערה. במקרה בו $p=2$ גם $q=2$ ואז זה למעשה אי־שוויון קושי שוורץ.

משפט. ***Minkowski*** יהי $1 \le p \le \infty$ ויהיו $f,g \in L_p$. אזי

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

הוכחה. את המקרים $p=1, p=\infty$ כבר ראינו.
נניח $1 < p < \infty$.

$$\|f+g\|_p^p = \int -X|f+g|^p d\mu = \int_X |f+g||f+g|^{p-1} d\mu$$

$$f+g \in L_p$$

$$|f+g|^{p-1} \in L_q$$

כאשר $q = \frac{p}{p-1}$. מדוע?

$$(|f+g|^{p-1})^q = |f+g| \in L_1$$

לכן,

$$\int_X |f+g||f+g|^{p-1} d\mu \le$$
$$\le \int_X |f||f+g|^{p-1}d\mu + \int_X |g||f+g|^{p-1}d\mu \le$$
$$\le \|f\|_p \cdot \||f+g|^{p-1}\|_q + \|g\|_p \||f+g|^{p-1}\|_q =$$
$$= (\|f\|_p \|g\|_p)(\int_X |f+g|^p d\mu)^{1/q}$$

$$\|f+g\|_p^p \le (\|f\|_p + \|g\|_p)\cdot[(\int |f+g|^p d\mu)^{1/p}]^{p/q} = (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f+g\|_p^{p/q}$$

אם $\|f+g\|_p^{p/q} = 0$ אי השוויון נכון.

נניח $\|f+g\|_p^{p/q} \neq 0$

$$\|f+g\|_p^{p-p/q} \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

$\square$

מעכשיו כל המרחבים הנ"ל הם מרחבים נורמיים.
(X, Σ, μ) מרחב מידה סופי ($\mu(x) < \infty$). $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$ אזי $L_{p_2} \subseteq L_{p_1}$
המקרה $p_2 = \infty$ - תרגיל.
נניח p_2 סופית. ניקח $f \in L_{p_2}$.

$$A_1 := \{x \in X : |f(x)| > 1\}$$

$$A_2 := X \setminus A_1$$

אם $x \in A_1$ אז $|f(x)|^{p_1} \leq |f(x)|^{p_2}$.

$$\int_X |f|^{p_1} d\mu = \int_{A_1} |f|^{p_1} d\mu + \int_{A_2} |f|^{p_1} d\mu \leq \int_{A_1} |f|^{p_2} d\mu + \mu(A_2) < \infty$$

האם ייתכן שוויון ולא הכלה? תלוי במרחב. ב$[0,1]$ ומידת לבג אין שוויון. אבל $\{1, \ldots, n\}$ ומידת הספירה יש שוויון. $\mathbb{N}$ ומידת הספירה אז $l_{p_1} \subseteq l_{p_2}$