פונקציות ממשיות - הרצאה 22

4.1.11

נדבר במילה אחת על: $(\mathbb{R}^n, \Sigma_n, m^n)$
m^n מידת לבג n ממדית.

משפט. יהי $a \in \mathbb{R}^n$. אם $E \in \Sigma_n$ אזי $a + E \in \Sigma_n$ וכן $m_n(a+E) = m_n(E)$.
אם f אינטגרבילית על $\mathbb{R}^n$ ומגדירים f_a ע"י $f_a(x) = f(a+x)$ אזי f_a אינטגרבילית ו-

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_a d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_n$$

הוכחה. נוכיח עבור $n = 2$. וזה יתאר בדיוק את מעבר האינדוקציה בלי לסבך את הסימונים.
נניח כי E מלבן מדיד, $E = E_1 \times E_2$ כאשר E_1, E_2 קבוצות מדידות לפי לבג על הישר.
$a = (a_1, a_2)$ אז $a + E = (a_1 + E_1) \times (a_2 + E_2)$.
$a_1 + E_1, a_2 + E_2$ מדידים לכן $a + E$ מלבן מדיד.

$$m_2(a+E) = m(a_1 + E_1) \cdot m(a_2 + E_2) = m(E_1) \cdot m(E_2) = m_2(E)$$

לכן מסקנת המשפט נכונה גם עבור איחודים סופיים של מלבנים זרים זה לזה. אותה האלגברה עליה הגדרנו לראשונה את המידה הדו־ממדית שממנה עברנו למידה החיצונית.
$E \subseteq \mathbb{R}^2$

$$m_2^*(E) = \inf\{\sum_k m_2(E_k) : E \subseteq \bigcup_k E_k, \text{ איחוד סופי של מלבנים מדידים זרים זה לזה} E_k\} =$$
$$= \inf\{\sum_k m_2(a+E_k) : E \subseteq \bigcup_k E_k, \text{ איחוד סופי של מלבנים מדידים זרים זה לזה} E_k\} =$$
$$= \inf\{\sum_k m_2(a+E_k) : a+E \subseteq \bigcup_k (a+E_k), \text{ איחוד סופי של מלבנים מדידים זרים זה לזה} E_k\}$$

אבל תמיד אפשר לכתוב,

$$a + E \subseteq \bigcup_k B_k = \bigcup_k (a + \underbrace{E_k}_{(-a)+B_k})$$

והרי זה כבר איחוד סופי של מלבנים מדידים זרים זה לזה שמכיל את E. לכן,

$$\inf\{\sum_k m_2(a+E_k) : a+E \subseteq \bigcup_k (a+E_k), \text{ איחוד סופי של מלבנים מדידים זרים זה לזה} E_k\} =$$
$$= \inf\{\sum_k m_2(B_k) : a+E \subseteq \bigcup_k B_k, \text{ איחוד סופי של מלבנים מדידים זרים זה לזה} E_k\} = m_2^*(a+E)$$

לכן המידה החיצונית של קבוצה אינה משתנה ע"י הזזה.
כעת, תהי $E \subseteq \mathbb{R}^2$ מדידה. יהי $\varepsilon > 0$. קיימת $G \subseteq \mathbb{R}^2$ פתוחה המקיימת $E \subseteq G$ ו־$m_2^*(G \setminus E) < \varepsilon$ (אפשר אפילו לכתוב מידה ולא מידה חיצונית).

$$a + E \subseteq a + G$$

גם $a + G$ פתוחה (קל לבדוק) וכן,

$$m_2^*((a + G) \setminus (a + E)) = m_2^*(a + G \setminus E) = m_2^*(G \setminus E) < \varepsilon$$

לכן, $a + E$ מדידה.
לכן הטענה מתקבלת עבור f פונקציה פשוטה המתאפסת מחוץ לקבוצה ממידה סופית.
מכאן, בעזרת משפט ההתכנסות המונוטונית מתקבלת המסקנה עבור פונקציות מדידות אי־שליליות. ואז עבור f^+, f^- ואז לכל פונקציות מדידה. $\square$

מרחבים נורמיים

הערה. בכל הפרק הזה אפשר בקלות להחליף את הממשיים במרוכבים. אבל הגדרנו אינטגרל על פונקציות ממשיות ובכלל כדאי לבדוק עוד פעם מהו השם של קורס זה.

הגדרה. מרחב מטרי (X, d) X אינה ריקה, $d : X \times X \to [0, \infty)$ נראת מטריקה אם יש לה התכונות הבאות:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\forall x, y, z \in X \ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$;
3. $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in X$;

הגדרה. נניח X מרחב לינארי (מעל ממשיים או מעל מרוכבים),

$$\| \cdot \| : X \to [0, \infty)$$

נקראת נורמה אם:

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \ \forall x \in X$ וכל סקלר α;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \forall x, y \in X$;

הגדרה. ניתן להגדיר מטריקה הומשרית ע"י נורמה באמצעות:

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

דוגמא. $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$,

$$\|x\|_2 := (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{1/2}$$

או נורמות אחרות:

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|x\|_\infty := \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$$

דוגמא. $C([0,1])$ המרחב הלינארי של כל הפונקציות הממשיות הרציפות על $[0,1]$. תהי $f \in C([0,1])$

$$\|f\| := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

אנחנו נדבר על מרחבים נורמיים הקשורים לאינטגרציה.

הגדרה. יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה, $1 \le p < \infty$ מספר קבוע כלשהו.
נסמן ב- $\mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu) = \mathcal{L}_p(X) = \mathcal{L}_p(\mu)$ אוסף כל הפונקציות המדידות $f : X \to \mathbb{R}$ עבורן:

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty$$

זהו מרחב לינארי ביחס לחיבור פונקציות וכפל פונקציה בממשי:

$$\alpha \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{L}_P \Rightarrow \alpha f \in \mathcal{L}_p$$

$$f, g \in \mathcal{L}_p, |f+g|^p \le (|f| + |g|)^p \le (2\max(|f|, |g|))^p \le 2^p(|f|^p + |g|^p)$$

$2^p(|f|^p + |g|^p)$ אינטגרבילית ולכן גם $|f+g|^p$ אינטגרבילית, ולכן $|f+g|^p \in \mathcal{L}_p$.