פונקציות ממשיות - הרצאה 21

2.1.11

מרחב מטרי תזכורת:
זוג מרחבי מידה: (X_j, Σ_j, μ_j), המידות שלמות, $j = 1, 2$. הגדרנו כבר מרחב מידה על המכפלה: $(X_1 \times X_2, \Sigma, \lambda)$.
כמו כן, אנו יודעים שאם $E \subseteq X_1 \times X_2$ מדידה ו- $\lambda(E) < \infty$ אזי

$$\lambda(E) = \int \mu_2(E_{x_1}) d\mu_1(x_1)$$

עבור כל כל x_1 ביחס ל- μ_1 החתך E_{x_1} מדידה ב- X_2.
הפונקציה $x_1 \to \mu_2(E_{x_1})$ מדידה וסופית כב"מ.
למעשה ניתן להתייחס לזה כאמירה על הפונקציה האופיינית של הקבוצה E.

משפט. ***Fubini***
יהיו מרחבי מידה כנ"ל. נניח כי f אינטגרבילית על $X_1 \times X_2$ ונגדיר עבור $x_1 \in X_1$ את הפונקציה $f_{x_1} : X_2 \to [-\infty . \infty]$ ע"י

$$f_{x_1}(x_2) := f(x_1, x_2), x_2 \in X_2$$

אזי עבור כמעט כל x_1 f_{x_1} מדידה על X_2 אינטגרביליץ על X_2.

$$x_1 \to \int f_{x_1} d\mu_2$$

אינטגרבילית על X_1 ומתקיים:

$$\int_{X_1} [\int_{X_2} f_{x_1} d\mu_2] d\mu_1 = \int_{X_1 \times X_2} f d\lambda$$

עבור הקבוצה שבה זה לא מוגדר היטב נגדיר איכשהו.

הוכחה. אם $f = \chi_E$, $E \in \Sigma$, $\lambda(E) < \infty$ המסקנה ידוע. נבדוק צעד צעד:
$f_{x_1} = (\chi_E)_{x_1} = \chi_{E_{x_1}}$. אנו ידועים כי כמעט לכל x_1 E_{x_1} מדידה, לכן הפונקציה מדידה. הסופיות ברורה.
$\mu_2(E_{(x_1)}) = \int \chi_{E_{x_1}} d\mu_2$ סופית עבור כמעט כל x_1.
$x_1 \to \mu_2(E_{x_1}) = \int_{X_2} \chi_{E_{x_1}} d\mu_2$
היא אי־שילילת, מדידה, סופית כב"מ ומקיימת:

$$\int_{X_1 \times X_2} \chi_E d\lambda = \int_{X_1} \mu_2(E_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \int_{X_1} [\int_{X_2} (\chi_E)_{x_1} d\mu_2] d\mu_1(x_1)$$

נשים לב כי מסקנת המשפט לינארית: אם מסקנת המשפט נכונה עבור f_1, f_2 אזי היא נכונה גם עבור $f_1 + f_2$ וגם עבור αf_1 כאשר $\alpha \in \mathbb{R}$. מכאן, מסקנת המשפט נכונה לכל פונקציה פשוטה המתאפסת מחוץ לקבוצה ממידה λ סופית (כי היא קומבינציה לינארית של הפונקציות הנ"לן.
כעת נעבור לפונקציות אינטגרביליות אי־שליליות. נניח כי $f \geq 0$. נוכיח כי מסקנת המשפט נכונה עבורה.
קיימת סדרה לא יורדת של פונקציות פשוטות אי־שליליות המתאפסות מחוץ לקבוצות ממידה סופית $\{\varphi_n\}$ המתכנסות ל– f. לכל φ_n מסקנת המשפט נכונה.
$(\varphi_n)_{x_1}$ מדידה עבור כמעט כל $x_1 \in X_1$. קבוצת הכמעט תלויה ב– n. נדבר על איברים שאינם באיחוד הקבוצות. הסדרה $\{(\varphi_n)_{x_1}\}$ לא יורדת המתכנסת ל– f_{x_1}. מכאן f_{x_1} מדידה עבור כמעט כל x_1.

$$\infty > \int_{X_1 \times X_2} f d\lambda \stackrel{1}{=} \lim_{n \to \infty} \int \varphi_n d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int_{X_1} [\int_{X_2} (\varphi_n)_{x_1} d\mu_2] d\mu_1(x_1)$$

1. מהתכנסות מונטונית.
הפונקציה $g_n : X_1 \to [0, \infty]$ המוגדרת ע"י

$$x_1 \to \int_{X_2} (\varphi_n)_{x_1} d\mu_2$$

f_{x_1} אינטגרבילית על X_2.
הינה סדרה לא יורדת של פונקציות אינטגרביליות כב"מ,

$$\infty > \lim_{n \to \infty} \int g_n d\mu_1$$

עפ"י אחד מהתרגילים גיליון מספר 11 הגבול קיים ו– $\lim_{n \to \infty} g_n$ סופי כב"מ, וממשפט ההתכנסות המונוטונית ניתן להחליף את הגבול באינטגרל.
לכן:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{X_1} [\int_{X_2} (\varphi_n)_{x_1} d\mu_2] d\mu_1(x_1) = \int_{X_1} [\lim_{n \to \infty} \int_{x_2} (\varphi_n)_{x_1} d\mu_2] d\mu_1(x_1)$$

והגבול

$$\lim_{n \to \infty} \int_{X_2} (\varphi_n)_{x_1} d\mu_2 < \infty$$

עבור כמעט כל x_1 לכן עבור x_1 כזה

$$f_{x_1} = \lim_{n \to \infty} (f_n)_{x_1}$$

סופי כב"מ על X_2.

$$\int_{X_2} f_{x_1} d\mu_2 = \lim_{n \to \infty} \int (\varphi_n)_{x_1} d\mu_2 < \infty$$

יתר על כן,

$$\int_{X_1} [\lim_{n \to \infty} \int_{x_2} (\varphi_n)_{x_1} d\mu_2] d\mu_1(x_1) = \int_{X_1} [\int_{X_2} f_{x_1} d\mu_2] d\mu_1$$

לכן קיבלנו את המסקנה עבור פונקציה מדידה אי־שלילית.
כעת נניח f אינטגרבילית כלשהי. $f = f^+ - f^-$ כמובן, f^+, f^- מקיימות את מסקנת המשפט לכן גם f מקיימת מסקנת המשפט. $\square$

כמובן שאפשר להחליף את הסדר בין X_1 לבין X_2 במשפט.
המפשט הזה כמובן משמש כדי לחשב אינטגרלים. נרצה משפט שיאפשר לטעון כי פונקציה מסויימת על מרחב מכפלה היא אנטגרבילית.

משפט. ***Tonelli***
נניח כי בנוסף להנחות בפוביני כי μ_1, μ_2 σ–סופית. תהי $f : X_1 \times X_2 \to [0, \infty)$ מדידה.
אזי:

1. עבור כמעט כל $x_1 \in X_1$ f_{x_1} פונקציה מדידה על X_2;
2. עבור כמעט כל $x_2 \in X_2$ f_{x_2} פונקציה מדידה על X_1;
3. $x_1 \to \int_{X_2} f_{x_1} d\mu_2$ מדידה על X_1;
4. $x_2 \to \int_{X_1} f_{x_2} d\mu_1$ מדידה על X_2;
5.

$$\int_{X_1} [\int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2)] d\mu_1(x_1) =$$
$$= \int_{X_2} [\int_{X_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1)] d\mu_2(x_2) = \int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) d\lambda(x_1, x_2)$$

הערות.
1. אפשר כמובן לנסח גם עבור פונקציות סופיות כב"מ.
2. הפונקציה $x_1 \to \int_{X_2} f_{x_1} d\mu_2$ או $x_2 \to \int_{X_1} f_{x_2} d\mu_1$ עלולות לא להיות מוגדרות בכל נקודה. נגדיר שם באופן שרירותי.
3. מסקנת המשפט לינארית.

הוכחה. μ_1, μ_2 σ–סופיות ולכן גם λ σ–סופית.
נכתוב $\{A_n\}$ מדידות, זרות בזוגות ו- $\forall n \lambda(A_n) < \infty$, כך ש- $X_1 \times X_2 = \bigcup_n A_n$.
נתחיל מ- $E \in \Sigma$. נרשום $E = \bigcup_n (E \cap A_n)$ קבוצות מדידות זרות בזוגות.

$$\chi_E = \sum_n \chi_{E \cap A_n}$$

$$(\chi_E)_{x_1} = \sum_n (\chi_{E \cap A_n})_{x_1}$$

עבור A_n מסויים הפונקציה $\chi_{E \cap A_n}{}_{x_1} = (\chi_{E \cap A_n})_{x_1}$ מדידה כמעט לכל x_1. וחתך של קבוצה מדידה בעלת מידה סופית הוא מדיד כמעט עבור כל x_1 כי $\lambda(E \cap A_n) < \infty$. לכן, $(\chi_E)_{x_1}$ מדידה עבור כמעט כל x_1.

$$\int (\chi_E)_{x_1} d\mu_2 \stackrel{1}{=} \sum_n \int_{X_2} (\chi_{E \cap A_n})_{x_1} d\mu_2 = \sum_n \mu_2((E \cap A_n)_{x_1})$$

1 – ממשפט ההתכנסות המונוטונית.

מהמשפט לפני פוביני אנו יודעים כי

$$x_1 \to \mu_2((E \cap A_n)_{x_1})$$

מוגדר עבור כמעט כל x_1. בשאר הנקודות נגדיר באופן שרירותי. זה לא יישנה כי המידה שלמה. לכל n מדידה על X_1.
לכן,

$$x_1 \to \int_{X_2} (\chi_E)_{x_1} d\mu_2$$

מדידה על X_1 כסכום של טור.

$$\int_{X_1} [\int_{X_2} (\chi_E)_{x_1} d\mu_2] d\mu_1(x_1) = \sum_n \int_{X_1} \mu_2((E \cap A_n)_{x_1}) d\mu_1(x_1) =$$
$$= \sum_n \lambda(E \cap A_n) = \lambda(E) = \int_{X_1 \times X_2} \chi_E d\lambda$$

מסקנת המשפט נכונה עבור f פונקציה פשוטה. תהי f מדידה אי־שלילית כלשהי. קיימת סדרה לא יורדת של פונקציות פשוטות $\{\varphi_n\}$ המתכנסת ל- f_n.
$\{(\varphi_n)_{x_1}\}$ היא סדרה לא יורדת המתכנסת ל- f_{x_1}. כל $(\varphi_n)_{x_1}$ מדידה עבור כמעט כל x_1 (אותה קבוצה יוצאת מן הכלל לכולן) לכן f_{x_1} מדידה עבור כמעט כל x_1. הסדרה לא יורדת לכן עפ"י משפט ההתכנסות המונוטונית

$$\int_{X_2} f_{x_1} d\mu_2 = \lim_n \int_{X_2} (\varphi_n)_{x_1} d\mu_2$$

עבור כמעט כל x_1. הפונקציות פשוטות לכן הפונקציות

$$x_1 \to \int_{X_2} (\varphi_n)_{x_1} d\mu_2$$

מדידות עבור כמעט כל x_1. לכן $x_1 \to \int_{X_2} f_{x_1} d\mu_2$ מדידה.

$$\int_{X_1 \times X_2} f d\lambda \stackrel{1}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{X_1 \times X_2} \varphi_n d\lambda =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_{X_1} [\int_{X_2} (\varphi_n)_{x_1} d\mu_2] d\mu_1 \stackrel{2}{=} \int_{X_1} [\int_{X_2} (\varphi_n)_{x_1} d\mu_2] d\mu_1 =$$
$$= \int_{X_1} [\int_{X_2} f_{x_1} d\mu_2] d\mu_1$$

1 ־ התכנסות מונטונית. 2 ־ התכנסות מונוטונית. $\square$

משפט טונלי תופס לפונציות אי־שליליות. נראה בתרגיל דוגמא לפונקציה שהאינטגרלים קיימים יש שוויון אבל האינטגרל לא קיים.
נראה שσ- סופיות המידה חשובה.

דוגמא. $X_1 = X_2 = [0,1]$, $\mu_1 = m$, $\mu_2 =$ מידת הספירה - כמה נקודות יש בקבוצה (סופי או אינסוף). המידה אינה σ–סופית.

$$X = X_1 \times X_2$$

$$D := \{(x,x) : 0 \le x \le 1\}$$

$X \setminus D$ איחוד בן מניה של מלבנים מדידים.

$$(\chi_D)_x(y) = \begin{cases} 0, & x \neq y \\ 1, & x = y \end{cases}$$

$$\chi_D(x,y) = \begin{cases} 0, & y \neq x \\ 1, & y = x \end{cases}$$

$$\int_{X_2} (\chi_D)_x d\mu_2(y) = \mu_2(\{x\}) = 1 \forall x \in [0,1]$$

$$(\chi_D)_y(x) = \chi_{D_y}(x) = \chi_{\{y\}}$$

$$\int_{X_1} (\chi_D)_y d\mu_1(x) = \mu_1(\{y\}) = 0 \forall y \in [0,1]$$

$$\int_{X_1} [\int_{X_2} (\chi_D)_x d\mu_2(y)] d\mu_1(x) = 1$$

$$\int_{X_2} [\int_{X_1} (\chi_D)_y d\mu_1(x)] d\mu_2(y) = 0$$

האינטגרלים אינם שווים ומסקנת המשפט אינה מתקיימת.