פונקציות ממשיות - הרצאה 20

28.12.10

$(X_1 \times X_2, \Sigma, \lambda)$

למה. תהי $E \in R_{\sigma\delta}$ ונניח $\lambda(E) < \infty$. נגדיר $g : X_1 \to [0, \infty]$, $x_1 \in X_1$,

$$g(x_1) := \mu_2(E_{x_1})$$

אזי g פונקציה מדידה $g \geq 0$ סופית כב"מ ומקיימת

$$\lambda(E) = \int_{X_1} g(x_1) d\mu_1(x_1)$$

הוכחה.

$$E = E_1 \times E_2$$

$$g(x_1) = \begin{cases} \mu_2(E_2), & x_1 \in E_1 \\ 0, & x_1 \notin E_1 \end{cases}$$

נניח $E \in R_\sigma$. E היא איחוד בן מניה של מלבנים מדידים זרים זה לזה.

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

נגדיר

$$g_n(x_1) := \mu_2((E_n)_{x_1}) \forall n$$

$$g(x_1) = \mu_2(E_{x_1}) = \mu_2(\bigcup_n (E_n)_{x_1}) = \sum_n \mu_2((E_n)_{x_1}) = \sum_n g_n(x_1)$$

מדידה, ≥ 0

$$\sum_{n=1}^{m} \int_{x_1} g_n(x_1) d\mu_1(x_1) = \sum_{n=1}^{m} \lambda(E_n) \leq \lambda(E) < \infty \forall m$$

למה. תהי $\{f_n\}$ סדרה לא יורדת של פונקציות אינטגרביליות אי שליליות ותהי $f = \lim_{n\to\infty} f_n$.

אם $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu < \infty$ אזי f סופית כב"מ.

הוכחה בשיעורי בית.

$$g = \sum_{n=1} g_n$$

$$\lim_{m\to\infty}\int_{X_1}(\sum_{n=1}^{m} g_n)d\mu_1 = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\int_{x_1} g_n d\mu_1 = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\lambda(E_n) = \lambda(E) < \infty$$

$$E \in R_{\sigma\delta}$$

קיימת סדרה לא עולה של קבוצות $\{A_n\}$ מ-R_σ $E = \bigcap_n A_n$
יתר על כן, אנחנו יודעים שקיימת $B \in R_\sigma$ $E \subseteq B$ $\lambda(B) \leq \lambda(E) + 1$

$$E = \bigcap_n (A_n \cap B)$$

אפשר להניח כעת $\lambda(A_1) < \infty$
$x_1 \in X_1$ $h_n(x_1) := \mu_2((A_n)_{x_1})$

$$g \leq \ldots \leq h_{n+1} \leq h_n \leq \cdots \leq h_1$$

h_1 סופית כב"מ.
סדרת החתכים

$$\{(A_n)_{x_1}\}$$

לא עולה.
אם

$$\mu_2((A_1)_{x_1}) = h_1(x_1) < \infty$$

אזי

$$\mu_2(E_{x_1}) = \mu_2(\bigcap_n (A_n)_{x_1}) = \lim_{n\to\infty}\mu_2((A_n)_{x_1}) = \lim_n h_n(x_1)$$

כל h_n מדידה לכן גם g מדידה $0 \leq$ סופית כב"מ

$$\int_{X_1}\int h_n d\mu_1 = \lim_n \lambda(A_n) = \lambda(E)$$

$\square$

מעתה והלאה נניח כי המידות μ_1, μ_2 שלמות.

למה. נניח $E \in \Sigma$, $\lambda(E) = 0$. אזי $E_{x_1} \in \Sigma_2, \mu_2(E_{x_1}) = 0$ עבור כמעט כל $x_1 \in X_1$.

הוכחה. קיימת $F \in R_{\sigma\delta}$ המקיימת $F \supseteq E$ $\lambda(F) = \lambda(E)$

$$E_{x_1} \subseteq F_{x_1}$$

$$\int_{X_1} \mu_2 d\mu_1(x_1) = \lambda(F)$$

$$\mu_2(F_{x_1}) = 0$$

כב"מ לכן $E_{x_1} \in \Sigma_2$ עבור כמעט כל x_1. $\mu_2(E_{x_1}) \leq \mu(F_{x_1}) = 0$

$\square$

משפט. תהי $E \in \Sigma$ $\lambda(E) < \infty$ אזי עבור כמעט כל $x_1 \in X_1$ מתקיים $E_{x_1} \in \Sigma_2$

$$x_1 \to \mu(E_{x_1})$$

מדידה $0 \geq$ סופית כב"מ

$$\lambda(E) = \int_{X_1} \mu_2(E_{x_1}) d\mu_1(x_1)$$

הוכחה. קיימת $F \in R_{\sigma\delta}$ המקיימת $F \supseteq E$ $\lambda(F) = \lambda(E)$. $G := F \setminus E$
$G \in \Sigma$, $\lambda(G) = 0$

$$E_{x_1} = F_{x_1} \setminus G_{x_1}$$

לכן $E_{x_1} \in \Sigma_2$ עבור כמעט כל x_1.

$$\mu_2(E_{x_1}) = \mu(F_{x_1}) < \infty$$

עבור כמעט כל x_1

$$x_1 \to \mu_2(E_{x_1})$$

מדידה

$$\int_{X_1} \mu_2(E_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \int_{X_1} \mu_2(F_{x_1}) d\mu_1(x_1) = \lambda(F) = \lambda(E)$$

$\square$