פונקציות ממשיות - הרצאה 2

19.10.10

ראינו בשיעור הקודם שאם $A \subseteq \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ אז קיימת O קבוצה פתוחה כך ש- $A \subseteq O$ וכן מתקיים:

$$m^*(O) < m^*(A) + \varepsilon$$

תוצאה. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$. קיימת תת־קבוצה G_δ של $\mathbb{R}$, נאמר B, המקיימת $A \subseteq B$ וכן

$$m^*(B) = m^*(A)$$

הוכחה. אם $m^*(A) = \infty$ אזי נבחר $B = \mathbb{R}$ וסיימנו.
אחרת, על־פי הטענה הקודמת לכל n טבעי קיימת O_n פתוחה המקיימת $A \subseteq O_n$ וכן $m^*(O_n) \leq m^*(A) + \frac{1}{n}$
נתבונן בחיתוך של $\{O_n\}$: $B := \bigcap\limits_n O_n$.
$A \subseteq B$ לכן בפרט $m^*(A) \leq m^*(B)$.
מצד שני, היות ו- $B \subseteq O_n$ לכל n

$$m^*(B) \leq m^*(O_n) \leq m^*(A) + \frac{1}{n}$$

השוויון מתקיים והקבוצה B היא קבוצה G_δ מהגדרתה. $\square$

המידה של לבג היא תת־סגימה אדיטיבית. זאת תכונה מצויינת אבל היינו רוצים לדרוש גם שאם יש לנו משפחה של קבוצות זרות שתיים־שתיים, אז מידת האיחוד של כולן תהיה סכום המידות של המחוברים, כמו שמתקיים באופן טבעי עבור קטעים. לצערנו מידת לבג לא מקיימת תכונה זו.
אי לכך, נצטרך להצתמצם ולדבר על מחלקה קטנה יותר של תתי־קבוצות של הישר הממשי, בהן המידה החיצונית של לבג תקיים גם את התכונה החדשה. מעתה נקרא לקבוצה שמקיימת את התכונה "קבוצה מדידה".
דרך אחת לבדוק האם קבוצה מקיימת את התנאי היא לפי תרגיל 4 בשיעורי בית 1 – קבוצה מדידה אם יש שוויון בין המידה הפנימית למידה החיצונית. עם זאת, ההגדרה הזאת לא ניתנת להרחבה לקבוצות כלליות, ובכלל מסורבלת להוכחת תכונות של קבוצות מדידות. נשתמש בהגדרה שקולה ונוחה יותר.

קבוצות מדידות

הגדרה. תהי μ^* מידה חיצונית על הקבוצה X. נאמר כי $E \subseteq X$ מדידה–μ^* אם לכל תת־קבוצה $A \subseteq X$ מתקיים:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \complement E)$$

באופן אינטואיטיבי ־ הקבוצה E והמשלים שלה מחלקות את A בצורה טובה.

הקבוצה A היא איחוד שתי הקבוצות $A \cap E$ ו־ $A \cap \complement E$, לכן מתת־סיגמה אדיטיביות נקבל את הכיוון $\leq$.
כלומר, כדי להוכיח שקבוצה E היא קבוצה מדידה די להוכיח את הכיוון:

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \complement E)$$

תכונות של קבוצות מדידות

1. אם E מדידה אז גם $\complement E$ מדידה. מדוע? התפקידים של E ו־ $\complement E$ סימטריים בשיוויון, וכן $\complement\complement E = E$.
2. $X, \varnothing$ הן קבוצות מדידות.

למה. אם $E \subseteq X, \mu^*(E) = 0$ אזי E קבוצה מדידה.

לכן בפרט, כל קבוצות בנות־מניה על הישר הממשי הן מדידות־לבג (ביניהן קבוצת קנטור שראינו בתרגיל).

הוכחה. תהי $A \subseteq X$ מתקיים $A \cap E \subseteq E$. לכן,

$$0 \leq \mu^*(A \cap E) \leq \mu^*(E) = 0$$

מצד שני, $A \cap \complement E \subseteq A$. לכן,

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap \complement E)$$

נחבר את שתי התוצאות:

$$\mu^*(A) + 0 \geq \mu^*(A \cap \complement E) + \mu^*(A \cap E)$$

לכן E קבוצה מדידה. $\square$

נרצה להראות שאיחוד בן־מניה של קבוצות מדידות הוא קבוצה מדידה. נתחיל משתי קבוצות.

למה. אם E_1, E_2 קבוצות מדידות אזי גם $E_1 \cup E_2$ היא קבוצה מדידה.

הוכחה. תהי $A \subseteq X$ קבוצה כלשהי.
נשים לב כי מתקיים השוויון הבא:

$$A \cap [E_1 \cup E_2] = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2 \cap \complement E_1)$$

כעת נחשב:

$$\begin{aligned}&\mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^*(A \cap \complement(E_1 \cup E_2)) \leq \\ &\qquad \leq \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*((A \cap \complement E_1) \cap E_2) + \mu^*((A \cap \complement E_1) \cap \complement E_2)) = \\ &\qquad\qquad = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap \complement E_1) = \mu^*(A)\end{aligned}$$

□

באינדוקציה נוכל להסיק כי כל איחוד של קבוצות מדידות הוא מדיד. כמו כן, נסיק כי עבור E_1, E_2 קבוצות מדידות גם $E_1 \cap E_2$ וכן $E_1 \setminus E_2$ מדידות.
מדוע? $E_1 \cap E_2$ מדידה $\Leftrightarrow$ $\complement(E_1 \cap E_2)$ מדידה. וכמובן $\complement(E_1 \cap E_2) = \complement E_1 \cup \complement E_2$ שהינו איחוד שתי קבוצות מדידות. כמו כן, $E_1 \setminus E_2 = E_1 \cap \complement E_2$ ולכן גם כן מדידה.

למה. אם $\{E_i\}_{i=1}^n$ קבוצות מדידות, זרות שתיים־שתיים ו־ $A \subseteq X$ כלשהו אז:

$$\mu^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^n E_i)) = \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i)$$

נשים לב:

1. עבור קבוצה והמשלים שלה זאת בדיוק ההגדרה של קבוצה מדידה.
2. עבור $A = X$ זאת בדיוק התכונה שלמענה התחלנו את כל הבלגן עם קבוצות מדידות – המידה החיצונית של איחוד שווה לסכום המידות החיצוניות של המחוברים.

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על n.
עבור $n = 1$ שני האגפים זהים ולכן הטענה נכונה.
נניח כי הטענה נכונה עבור $n-1$ קבוצות. נחשב:

$$\begin{aligned}&\mu^*\Big(A \cap (\bigcup_{i=1}^n E_i)\Big) = \\ &\qquad = \mu^*\Big(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i) \cap E_n\Big) + \mu^*\Big(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i) \cap \complement E_n\Big) = \\ &\qquad = \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*\Big(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i)\Big) = \mu^*(A \cap E_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \mu^*(A \cap E_i)\end{aligned}$$

השוויון הראשון נובע מהעובדה ש־ E_n מדידה. השוויון השני כי הקבוצות זרות שתיים־שתיים. השוויון השלישי מהנחת האינדוקציה. □

למה. תהיינה $\{E_i\}_{i=1}^\infty$ קבוצות מדידות. אזי קיימות $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ קבוצות מדידות, זרות שתיים־שתיים, המקיימות $\bigcup_{i=1}^\infty E_i = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$

הוכחה. נגדיר $A_1 := E_1$

לכל $m > 1$ נגדיר $A_n := E_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$

A_n מדידות (הפרש בין קבוצה מדידה ואיחוד קבוצות מדידות). הקורא החרוץ מוזמן להוכיח שאכן הקבוצות זרות שתיים־שתיים וכי האיחודים שווים. $\square$

משפט. תהיינה $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ קבוצות מדידות. אזי גם $E := \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ היא קבוצה מדידה.

הוכחה. בלי הגבלת הכלליות נניח כי $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ זרות שתיים שתיים. לכל מספר שלם חיובי נגדיר:

$$F_n := \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

תהי $A \subseteq X$ תת־קבוצה כלשהי. לכל n F_n מדידה ולכן לכל n :

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap \complement F_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap \complement F_n) \geq$$

$$\geq \mu^*(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i) + \mu^*(A \cap \complement F_n)$$

השווין האחרון נכון מתת־סיגמא אדיטיביות. אי־השוויון נכון לכל n לכן השוויון נכון גם עבור כל הטור, עד אינסוף.

$\square$