פונקציות ממשיות - הרצאה 19

26.12.10

יהיו $(x_2,\Sigma_2,\mu_1),(X_2,\Sigma_2,\mu_2)$.
מינוח: $A_1\subseteq X_1, A_2\subseteq X_2$.
$A_1\times A_2$ יקרא מלבן מדיד אם $A_1\in\Sigma_1, A_2\in\Sigma_2$.
R משפחה של האיחודים הסופיים של מלבנים מדידים זרים זה לזה.

למה. R היא אלגברה של תת קבוצות של $X_1\times X_2$.

נוכיח באמצעות הלמה הבאה:

למה. תהי a משפחה לא ריקה של ת"ק של X. נניח כי:

1. אם $E\in a$ אזי גם $X\setminus E\in a$.
2. אם $E,F\in a$ אזי $E\cap F\in a$.
3. אם $E,F\in a$ ו־ $E\cap F=\varnothing$ אזי $E\cup F\in a$.

אז a היא אלגרבה.

הוכחה בתרגיל בית.
נראה כי R מקיימת התכונות הנ"ל. R היא כמובן לא ריקה. היא בוודאי מקיימת את 3.
נראה כי מקיימת את 1:
נניח $A_j\in\Sigma_j$ $j=1,2$ נתבונן במשלים:

$$X_1\times X_2\setminus(A_1\times A_2)=[A_1\times(X_2\setminus A_2)]\cup[(X_1\setminus A_1)\times X_2]$$

אלה מלבנים מדידים זרים ולכן ב־ R.
ע"י אינדוקציה נוכיח כי R מקיימת את 1.
נראה כי R מקיימת את 2.

$$A_1\times A_2, B_\times B_2\in R$$

$$(A_1\times A_2)\cap(B_1\times B_2)=(A_1\cap B_1)\times(A_2\cap B_2)$$

ונשלים באמצעות אינדוקציה.
עבור מלבן מדיד $A_1\times A_2$ מגדירים $\lambda(A_1\times A_2)=\mu_1(A_1)\cdot\mu_2(A_2)$
כאשר $0\cdot\infty:=0$.
נרצה להרחיב את ההגדרה למידה על R.

למה. נניח כי A_1 מלבן מדיד. $\{B_1^n \times B_2^n\}_{n=1}^{\infty}$ מלבנים זרים זה לזה ו־

$$A_1 \times A_2 = \bigcup_n (B_1^n \times B_2^n)$$

אזי

$$\lambda(A_1 \times A_2) = \sum_n \mu_1(B_1^b)\mu_2(B_2^n)$$

כלומר λ היא סיגמא־אדיטיבית.

הוכחה. תחילה נשים לב כי

$$\chi_{C_1 \times C_2}(x_1, x_2) = \chi_{C_1}(x_1)\chi_{C_2}(x_2)$$

ועבור $\{E_n\}$ קבוצות זרות זו לזו אזי

$$\chi_{\cup E_n} = \sum_n \chi_{E_n}$$

כעת,

$$\chi_{A_1}(x_1)\chi_{A_2}(x_2) = \sum_n \chi_{B_1^n}(x_1)\chi_{B_2^n}(x_2)$$

לכל $(x_1.x_2) \in X_1 \times X_2$.
נקבע את x_1. עפ"י משפט ההתכנסות המונוטונית

$$\chi_{A_1}(x_1)\mu_2(A_2) = \sum_n \chi_{B_1^n}(x_1)\mu_2(B_2^n)$$

לכל $x_1 \in X_1$.
כשדיברנו על אינטגרציה דרשנו פונקציות סופיות כב"מ. כאן ייתכן שאחד המחבורים אינו סופי כב"מ. אם עבור n מסויים הפונקציה $\mu_2(B_2^n)\chi_{B_1^n}(x_1)$ אינה סופית כב"מ אזי $\mu_2(B_2^n) = \infty$ ו־ $\mu_1(B_1^n) > 0$ במקרה זה $\lambda(B_1^n \times B_2^n) = \infty$ ואז $\lambda(A_1 \times A_2) = \infty$ כי $B_1^n \subseteq A_1$, $B_2^n \subseteq A_2$ ואז השוויון הדרוש מתקיים.
כעת נוכל להניח כי המחוברים סופיים כב"מ. שוב עפ"י משפט ההתכנסות המונוטונית

$$\mu_1(A_1)\mu_2(A_2) = \sum_n \mu_1(B_1^n)\mu_2(B_2^n) = \sum_n \lambda(B_1^n \times B_2^n)$$

□

תהי $E \in R$, $E = \bigcup_{i=1}^n (A_1^i \times A_2^i)$ איחוד סופי של מלבנים מדידים זרים זה לזה.
$\lambda(E) := \sum_{n=1}^n = \lambda(A_1^i \times A_2^i)$
אבל ייתכן שיש שתי הצגות של E כאיחוד סופי של מלבנים מדידים זרים. אז צריך להראות שההגדרה אינה תלויה בבחירת המלבנים.
אם גם $E = \bigcup_{j=1}^p (B_1^j \times B_2^j)$ מדידים וזרים זה לזה. נראה כי: $\sum_i \lambda(A_1^i \times A_2^i) = \sum_j \lambda(A_1^j \times A_2^j)$
ואכן,

$$A_1^i \times A_2^i = (A_1^i \times A_2^i) \cap E = \bigcup_{j=1}^{p} [A_1^j \cap B_1^j) \times (A_2^i \cap B_2^j)]$$

אבל $[A_1^j \cap B_1^j) \times (A_2^i \cap B_2^j)]$ מלבנים מדידים זרים זה לזה.

$$\lambda(A_1^i \times A_2^i) = \mu_1(A_1^i)\mu_2(A_2^i) = \sum_{j=1}^{p} \mu_1(A_1^i \times B_1^j)\mu(A_2^i \times B_2^j)$$

$$\mu_1(B_1^j)\mu_2(B_2^j) = \sum_{i,1\leq j\leq p} \mu_1(A_1^i \cap B_1^j)\mu_2(A_2^i \cap B_2^j)$$

$$\sum_i \mu_1(A_1^i)\mu_2(A_2^i) = \sum_j \sum_i \mu_1(A_1^i \cap B_1^j)\mu_2(A_2^i \cap B_2^j) = \sum_j \mu_1(B_1^j)\mu_2(B_2^j)$$

למה. λ מידה על R.

הוכחה. נניח כי $\{E_n\} \subseteq R$ זרות בזוגות וכי $E := \bigcup_n E_n \in R$.

$$E_n = \bigcup_{j=1}^{k_n} (B_{1n}^j \times B_{2n}^j)$$

$(B_{1n}^j \times B_{2n}^j)$ מלבנים מדידים זרים בזוגות.

$$E = \bigcup_i (A_1^i \times A_2^i)$$

$(A_1^i \times A_2^i)$ מלבנים מדידים זרים בוזוגות.
$\{B_{1n}^j \times B_{2n}^j\}_{j=1,n=1}^{p_n}$

$$1 \leq i \leq m$$

$$A_1^i \times A_2^i = \bigcup_n \bigcup_{j=1}^{k_n} [(A_1^i \cap B_{1n}^j) \times (A_2^i \cap B_{2n}^j)]$$

זרים בזוגות

$$\mu_1(A_1^i)\mu_2(A_2^i) \sum_n \sum_{j=1}^{k_n} \mu_1(A_1^i \cap B_{1n}^j)\mu_2(A_2^i \cap B_{2n}^j)$$

$$\lambda(E) = \sum_{i=1}^{n} \mu_1(A_1^i)\mu_2(A_2^i) = \sum_n \sum_{j=1}^{k_n} \sum_{i=1}^{m} \mu_1(A_1^i \cap B_{1n}^j)\mu_2(A_2^i \cap B_{2n}^j)$$

$$B^j_{1n} \times B^j_{2n} = \bigcup_{i=1}^m [(A_1^i \cap B^j_{1n}) \times (A_2^i \cap B^j_{2n})]$$

זרים בזוגות

$$\mu_1(B^j_{1n})\mu_2(B_{2n}) = \sum_{i=1}^m \mu_1(A_1^i \times B^j_{1n})\mu_2(A_2^i \cap B^j_{2n})$$

$$\sum_n \sum_{j=1}^{k_n} \sum_{i=1}^m \mu_1(A_1^i \cap B^j_{1n})\mu_2(A_2^i \cap B^j_{2n}) = \sum_n \sum_{j=1}^{k_n} \mu_1(B^j_{1n})\mu_2(B^j_{2n}) = \sum_n \lambda(E_n)$$

$\square$

עכשיו יש לנו מידה על R.
מרחיבים את λ לאלגברה- σ של תת הקבוצות של $X_1 \times X_2$ המדידות ביחס ל- λ^*.
$\lambda := \mu_1\mu_2$

$$(X_1 \times X_2, \Sigma, \lambda)$$

מרחב מידה. נקרא לעיתים גם מרחב המכפלה.
אם μ_1, μ_2 σ–סופיות אזי גם λ היא σ–סופית.
הדוגמא החשובה ביותר היא $\mathbb{R}^2$:
$(\mathbb{R}, \Sigma_1, m_1)$,$(\mathbb{R}, \Sigma_1, m_1) \Rightarrow (\mathbb{R}^2, \Sigma_2, m_2 = m_1 \times m_1)$ מידת לבג על $\mathbb{R}^2$.
כל תת קבוצה פתוחה של $\mathbb{R}^2$ מדידה לפי לבג. כל תת קבוצה בורלית של $\mathbb{R}^2$ מדידה לפי לבג.
מדוע כל קבוצה פתוחה?
נניח E פתוחה. ניקח $p = (x, y) \in E$. ניקח D עיגול פתוח אשר מרכזו ב–p והוא מוכל ב–E. ניקח נקודה בעיגול עם קורדינטות רציונליות $q = (x', y')$ וקרוב מספיק ל–p כך שאיזשהו ריבוע סביב q מכיל את p מוכל ב- D. ע"י הקטנה ניתן להניח שאורך צלע הריבוע רציולנית. יש רק $\aleph_0$ כאלה.
נחזור למרחב מידה כללי.
$E \subseteq X_1 \times X_2$. $x_1 \in X_1$

$$E_{x_1} := \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in E\}$$

החתך דרך x_1.

$$\chi_{E_{x_1}}(x_2) = \chi_E(x_1, x_2) \forall x_2 \in X_2$$

למה. אם $E \in R_{\sigma\delta}$ אזי $E_{x_1} \in \Sigma_2$ לכל $x_1 \in X_1$.

הוכחה. הטענה נכונה אם E מלבן מדיד.

$$(\bigcup_\alpha E_\alpha)_{x_1} = \bigcup_\alpha (E_\alpha)_{x_1}$$

לכן הטענה נכונה עבור ס R_σ

$$(\bigcap_\alpha E_\alpha)_{x_1} = \bigcap_\alpha (E_\alpha)_{x_1}$$

לכן הטענה נכונה עבור ס $R_{\sigma\delta}$

$\square$

למה. תהי $E \in R_{\sigma\delta}$ $\lambda(E) < \infty$. נגדיר X_1 $x_1 \in$ $g(x_1) := \mu_2(E_{x_1})$. אזי g פונקציה מדידה על X_1, אי־שלילית וסופית כב"מ ־ μ_1. ומתקיים $\lambda(E) = \int_{x_1} g(x_1) d\mu_1(x_1)$

הוכחה. המסקנה טריוויאלית אם E מלבן מדיד. גם עבור קבוצה $E \in R$. נניח כי $E \in R_\sigma$. $E = \bigcup_n E_n$, $E_n \in R$. נניח כי E_n זרות בזוגות.
כל E_n הוא איחוד סופי של מלבנים מדידים זרים זה לזה.

$$g_n(x_1) := \mu_2((E_n)_{x_1}), x_1 \in X_1$$

g_n היא מדידה, אי שלילית, סופית כב"מ ביחס ל־ μ_1.

$$g(x_1) = \mu_2((\bigcup_n E_n)_{x_1}) = \mu_2(\bigcup_n (E_n)_{x_1}) = \sum_n \mu_2((E_n)_{x_1}) = \sum_n g_n(x_1)$$

$\square$