פונקציות ממשיות - הרצאה 18

21.12.10

נסמן a_σ משפחת כל תת הקבוצות שהן איחוד בן מניה של קבוצות מ-a. כמובן $a \subseteq a_\sigma$, כמובן שכל קבוצה מ- a_σ מדידה לפי μ^* וכמובן שכל קבוצה מ- a_σ נמצאת באלגברה-σ הנוצרת ע"י הקבוצות המדידות מ- a.
$a_{\sigma\delta}$ משפחת כל תת הקבוצות שהן חיתוכים בני מניה של קבוצות מ- a_σ. אזי $a_\sigma \subseteq a_{\sigma\delta}$ את ההרחבה של μ לאלגברה-σ של הקבוצות המדידות לפי μ^* נסמן ב-μ. כדי למנוע בלבול.

למה. תהי $E \subseteq X$ ויהי $\varepsilon > 0$. קיימת $F \in a_\sigma$ המקיימת $E \subseteq F$, כך ש-

$$\mu(F) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$$

וקיימת $G \in_{\sigma\delta}$ המקיימת $E \subseteq G$ $\mu(G) = \mu^*(E)$

הוכחה בתרגיל בית.

$$a \subseteq \Sigma(A) \subseteq \Sigma_m u$$

μ מידה על אלגברה a של תת קבוצות של X. μ נקראת σ-סופית אם קיימות קבוצות $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subseteq a$ המקיימות $\bigcup_n E_n = X$ ו-

$$\forall n \quad \mu(E_n) < \infty$$

אפשר להניח כי $\{E_n\}$ זרות בזוגות, אחרת נעבור ל-

$$F_1 := E_1$$

$$F_n := E_m \setminus (F_1 \cup \ldots \cup F_{n-1})$$

מידת לבג על $\mathbb{R}$ אינה סופית אבל בוודאי σ-סופית.

משפט. נניח כי μ σ-סופית. אזי ל- μ הרחבה יחידה ל- $\Sigma(a)$.

הוכחה. נניח כי $\hat{\mu}$ מידה על $\Sigma(a)$ ו- $\hat{\mu}|_a = \mu$
נניח $E \in a_\sigma$. $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ כאשר $E_n \in a$ $\forall n$ $\{E_n\}$ זרות בזוגות.

$$\mu(E) = \Sigma\mu(E_n) = \Sigma\hat{\mu}(E_n) = \hat{\mu}(E_n)$$

יהי $E \in \Sigma(a)$ יהי $\varepsilon > 0$ קיימת $F \in a_\sigma$ המקיימת $E \subseteq F$
$\mu(F) \le \mu(E) + \varepsilon$

$$\hat{\mu}(E) \le \hat{\mu}(F) = \mu(F) \le \mu(E) + \varepsilon$$

לכן $\hat{\mu}(E) \le \mu(E)$ לכל $E \in \Sigma(a)$
תהי $E \in \Sigma(a)$. נניח $\mu(E) < \infty$
יהי $\varepsilon > 0$ קיימת $F \in a_\sigma$ המקיימת $E \subseteq F$ ו- $\mu(F) \le \mu(E) + \varepsilon$

$$F = E \cup (F \setminus E)$$

$$\hat{\mu}(F \setminus E) \le \mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E) < \varepsilon$$

$$\mu(E) \le \mu(F) = \hat{\mu}(F) = \hat{\mu}(E) + \hat{\mu}(F \setminus E) \le \hat{\mu}(E) + \varepsilon$$

לכן,

$$\mu(E) \le \hat{\mu}(E) + \varepsilon$$

$$\mu^*(E) \le \hat{\mu}(E)$$

$E \in \Sigma(a)$, $\mu(E) < \infty \Leftarrow \hat{\mu}(E) = \mu(E)$
עד כאן נכון לכל מידה, לאו דווקא σ–סופית. אבל תחת ההנחה $\mu(E) < \infty$
תהי $E \in \Sigma(a)$ קיימות $\{X_n\} \subseteq X$ זרות בזוגות המקיימות

$$\forall n \quad \mu(X_n) < \infty$$

$$X = \bigcup_n X_n$$

$$E = \bigcup (E \cap X_n)$$

$$\forall n \mu(E \cap X_n) \le \mu(X_n) < \infty$$

$$\hat{\mu}(E) = \sum_n \hat{\mu}(E \cap X_n) = \sum_n (\mu(E \cap X_n) = \mu(E)$$

□