פונקציות ממשיות - הרצאה 17

14.12.10

נגדיר מידה על $\mathbb{R}^n$ באופן כללי על מרחב שהוא מכפלה קרטזית של מרחבי מידה.
(X_i, Σ_i, μ_i) עבור $i = 1, 2$

$$X = X_1 \times X_2$$

$$A_i \in \Sigma_i$$

$$A_1 \times A_2 \subseteq X_1 \times X_2$$

נקראת מלבן.
באופן טבעי:

$$\mu(A_1 \times A_2) := \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$$

הבעיה שאיחודים של מלבנים לא מהווים אלגברה- σ. לעומת זאת אוסף סופי של מלבנים מהווה אלגברה.
על האלגברה הזאת אפשר להגדיר מידה, אבל בשביל אינטגרציה אנחנו רוצים אלגברה-σ.
אז נחשוב כיצד נרחיב את מושג המידה על אלגברה.
נניח X קבוצה. אוסף a של תת־קבוצות של X נקרא אלגברה של קבוצות אם:

1. $\varnothing \in a$.
2. $E \in a \Leftarrow X \setminus E \in a$.
3. $E_i \in a$, $1 \le i \le n \Leftarrow \bigcup_1^n \in a$.

במקום קבוצה בת מניה, קבוצה סופית.
אם $\{E_i\}_{i=1}^n \subseteq a$ אזי $\bigcap_{i=1}^n E_i \in a$
ולכן אם $E, F \in a$ אזי:

$$E \setminus F \in a$$

פונקציה $\mu : a \to [0, \infty]$ נקראת מידה על a אם

$$\mu(\varnothing) = 0$$

ואם
$\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq a$ זרות בזוגות
$\bigcup_{i=1} \infty E_i \in a$
אזי:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

זה לא אוטומטי כי לא אלגברה-σ.
כמובן שאם a במקרה סיגמה אלגברה אז המידה הזאת מזדהה עם המידה כפי שאנחנו מכירים.
כמובן כי מתקיים גם
$\{E_i\}_{i=1}^{n} \subseteq a$ זרים בזוגות אזי

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \mu(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n \cup \varnothing \cup \varnothing \ldots) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) + 0$$

יהיו $E, F \in a$
$E \subseteq F$
אזי

$$\mu(E) \leq \mu(F)$$

למה. נניח כי $E \in a$ $\{E_i\}_{i=1} \subseteq a$

$$E \subseteq \bigcup_{i=1} E_i$$

אזי,

$$\mu(E) \leq \sum_{i=1} \mu(E_i)$$

לא הנחנו במקרה של סדרה אינסופית כי האיחוד שייך ל- a.

הוכחה. נסמן $F_1 := E \cap E_1$ ... $F_n := (E \cap E_n) \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} F_i$
$\forall i F_i \in a$
$\{F_i\}$ זרות בזוגות.

$$\bigcup_{i=1} F_i = E$$

$\mu(E) = \sum_{i=1} \mu(F_i) \leq_{i=1} \mu(E_i)$

$\square$

אם נתונה מידה על אלגברה a נוכל להגדיר מידה חיצונית על אוסף תת־הקבוצות של X.
אם $E \subseteq X$ כלשהי נגדיר

$$\mu^*(E) = \inf\{\sum_i \mu(E_i) : E_i \in a, E \subseteq \bigcup_i E_i\}$$

לכל קבוצה E האוסף הזה לא ריק. לכל קבוצה יש כיסוי בן מניה – הכיסוי הטריוויאלי X.
נראה כי μ^* אכן מידה חיצונית אבל תחליה למה:

למה. אם $E \in a$ אזי $\mu^*(E) = \mu(E)$

הוכחה. אם $\{E_i\} \subseteq a$ $E \subseteq E_i$ אזי

$$\mu(E) \leq \sum_{i=1} \mu(E_i)$$

לכן $\mu(E) \leq \mu^*(E)$

$$E = E \cup \varnothing \cup \ldots$$

ואז

$$\mu(E) + 0 + 0 + \ldots$$

מופיע בהגדרת המידה החיצונית. לכן $\mu^*(E) \leq \mu(E)$.

$\square$

למה. μ^* מידה חיצונית.

הוכחה.

$$\mu^*(\varnothing) = 0$$

אם $E \subseteq F \subseteq X$
לכן

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$$

כי כל כיסוי של F הוא כיסוי של E לכן כל מספר שמופיע בהגדרת המידה החיצונית של F מופיע גם בהגדרת המידה החיצונית של E.
נותר להראות כי

$$\mu^*(\bigcup_i E_i) \leq \sum_i \mu^*(E_i)$$

אם אחד המחוברים מימין הוא אינסוף לא צריך לעבוד. לכן נניח כי $\forall i, \mu^*(E_i) < \infty$.
יהי $\varepsilon > 0$. יהי $i \in \mathbb{N}$ קיימות קבוצות $\{F_{ij}\} \subseteq a$ המקיימות

$$E_i \subseteq \bigcup_j F_{ij}$$

$$\sum_j \mu(F_{ij}) < \mu^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

$$\bigcup_i E_i \subseteq \bigcup_{i,j} F_{ij}$$

לכן

$$\mu^*(\bigcup_i E_i) \leq \sum_{i,j} \mu(F_{ij}) = \sum_i \sum_j \mu(F_{ij}) \leq \sum_i (\mu^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}) \leq \sum_i \mu^*(E_i) + \varepsilon$$

נכון לכל $\varepsilon > 0$ לכן מקבלים את הדרוש.
$\because$

$\square$

למה. כל קבוצה $E \in a$ מדידה ביחס ל- μ^*.

צריך להראות כי אם $F \subseteq X$ אזי $\mu^*(E) = \mu^*(F \cap E) + \mu^*(F \cap (X \setminus E))$
הכיוון $\leq$ ברור.
נוכיח $\geq$
נניח $\mu^*(F) < \infty$
יהי $\varepsilon > 0$ קיימות $\{E_i\} \subseteq a$ המקיימות $F \subseteq \bigcup_i E_i$

$$\sum_i \mu(E_i) < \mu^*(F) + \varepsilon$$

$$E \cap F \subseteq \bigcup_i (E \cap E_i)$$

$$(X \setminus E) \cap F \subseteq \bigcup_i ((X \setminus E) \cap E_i)$$

$$(X \setminus E) \cap E_1 \in a, E \cap E_i \in a$$

$$\begin{aligned}
&\mu^*(E \cap F) + \mu^*((X \setminus E) \cap F) \leq \\
&\qquad \leq \sum_i \mu(E \cap E_i) + \sum_i \mu((X \setminus E) \cap E_i) = \\
&\qquad = \sum_i [\mu(E \cap E_i) + \mu(X \setminus E) \cap E_i)] = \\
&\qquad = \sum_i \mu(E_i) \leq \mu^*(F) + \varepsilon
\end{aligned}$$

עכשיו יש לנו אלגברה-σ שמכילה את כל הקבוצות המדידות ביחס למידה חיצונית שהם אלגברה-σ. A מוכלת בה מהלמה. μ^* מצומצמת על A היא מידה. לכן יש לנו מידה. והיא מזדהה עם μ. הצלחנו להרחיב ת μ לאלגברה-σ של קבוצות המכילה את F