פונקציות ממשיות - הרצאה 16

12.12.10

המטרה שלנו היא להוכיח שאם הפונקציה היא רציפה בהחלט אז היא אינטגרל לא מסויים של פונקציה אינטגרבילית כלשהי.

למה. אם f רציפה בהחלט על $[a,b]$ אזי f בעלת השתנות חסומה על $[a,b]$.

הוכחה. יהי $\delta>0$ המספר המתאים ל- $\varepsilon=1$ בהגדרת הרציפות בהחלט.
נרצה לחלק את $[a,b]$ לקטעים שהאורך של כל אחד מהם הוא לכל היותר δ. ניקח:

$$N:=\left[\frac{b-a}{\delta}\right]+1$$

תהי,

$$a=c_0<c_1<\ldots<c_N=b$$

חלוקה המקיימת $0<c_{i+1}-c_i<\delta$ ותהי $\{x_k\}_{k=1}^p$ חלוקה כלשהי של $[a,b]$.
רוצים למצוא מספר החוסם מלעיל ללא תלות בחלוקה. נאחד את שתי החלוקות:

$$\{y_j\}_{j=0}^{N+p+1}:=\{x_k\}_{k=1}^p\cup\{c_i\}_{i=0}^N$$

יכול להיות שחלק מהאיברים מזדהים ואז נדבר על קטע מנוון.
נתבונן בסכום כל הקטעים של החלוקה המאוחדת אשר נופלים בתוך הקטע $(c_i,c_{i+1}]$:

$$\sum_{c_i<y_{j+1}\le c_{i+1}}(y_{j+1}-y_j)=c_{i+1}-c_i\le\delta$$

$$\sum_{c_i<y_{j+1}\le c_{i+1}}|f(y_{j+1})-f(y_j)|=\le\varepsilon$$

כעת,

$$\sum_{k=1}^p|f(x_{k+1})-f(x_k)|\le$$
$$\overset{1}{\le}\sum_{j=1}^{N+p+1}|f(y_{j+1})-f(y_j)|\overset{2}{=}\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{c_i<y_{j+1}\le c_{i+1}}|f(y_{j+1})-f(y_j)|\le N$$

1 כי מגדילים את מספר נקודות החלוקה לכן לפי אי־שוויון המשולש.

2 כי נחלק לפי הקטעים c_i.
כלומר,

$$\sum_{k=1}^{p}|f(x_{k+1})-f(x_k)|\leq N$$

N תלוי ב- f וב- δ אבל לא בחלוקה ולכן הפונקציה היא בעלת השתנות חסומה. $\square$

מעתה והלאה אפשר לדבר על נגזרת כב"מ של פונקציה רציפה בהחלט.

למה. אם f רציפה בהחלט בקטע $[a,b]$ ו- $f'=0$ כב"מ אזי f היא פונקציה קבועה ב- $[a,b]$.

הוכחה. תהי $c\in[a,b]$. נרצה להראות כי $f(a)=f(c)$.
יהי $\varepsilon>0$. כדי להוכיח את השוויון אנחנו נבנה חלוקה של הקטע $[a,c]$ כך שנחלק את הקטעים החלקיים של החלוקה לשתי קבוצות: על הקבוצה הראשונה ההשתנות תהיה קטנה כי ועל הקבוצה השנייה ההתשנות תהיה קטנה כי הנגזרת מתאפסת.
יהי $\delta>0$ הנתון בהגדרת הרציפות בהחלט.

$$E:=\{x\in[a,b]:f'(x)=0\}$$

החלק שלה ב- $[a,c]$ הוא גם גדול.

$$E=(E\cap[a,c])\cup(E\cap[c,b])$$

$$b-a=m(E)=m(E\cap[a,c))+m(E\cap[c,b])\leq c-a+b-c=b-a$$

לכן בכל מקום יש שוויון, ובפרט:

$$m(E\cap[a,c))=c-a$$

נסמן:

$$A:=E\cap[a,c)$$

נזכור כי אם $x\in A$ אז $\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)=0$.
נתבונן באוסף הקטעים:

$$\{[x,x+h]:x\in A,h>0,[x,x+h]\subseteq[a,c),|f(x+h)-f(x)|\leq\varepsilon h\}$$

אוסף זה של קטעים מכסה את A לפי V. כלומר לכל נקודה $x\in A$ יש קטעים מהקבוצה קטנים כרצוננו שנמצאים באוסף (וזה ברור כי הגבול הוא 0).
ובכן, עפ"י הלמה של V קיים קטעים $\{[x_i,x_i+h_i]\}_{i=1}^{n}$ באוסף הנ"ל, זרים בזוגות המקיימים:

$$m^*(A\setminus\bigcup_{i+1}^{n}[x_i,x_i+h_i])<\delta$$

ואפשר לכתוב במקום פשוט מידה.

$$m(A \setminus \bigcup_{i+1}^{n} [x_i, x_i + h_i]) < \delta$$

נסמן:

$$y_i := x_i + h_i$$

$$[x_i, y_i] \subseteq [a, c), h_i > 0, x_i \in A, |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon(y_i - x_i)$$

אפשר להניח כי $y_i < x_i + 1$ לכל i.
קיבלנו השתנות חסומה על כל $[x_i, y_i]$.
מה לגבי $[y_i, x_{i+1}]$?
נסמן $y_0 := a$, $c := x_{n+1}$
מה המידה הכללית של כל הקטעים $[y_i, x_{i+1}]$?

$$[a, c) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} [x_i, y_i] \subseteq ([a, c] \setminus A) \cup (A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} [x_i, y_i])$$

$$m([a, c) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} [x_i, y_i]) \leq m(([a, c] \setminus A)) + m((A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} [x_i, y_i]))$$

לכן,

$$m([a, c) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} [x_i, y_i]) < \delta$$

$$m(\bigcup_{i=0}^{n} [y_i, x_{i+1}]) < \delta$$

כעת נתבונן ב–

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= \\ = |f(x_{n+1}) - f(y_n) + f(y_n) - f(x_n) + \ldots + f(y_1) - f(x_1) + f(x_1) - f(y_0)| &\leq \\ \leq \sum_{i=0}^{n} |f(x_{i+1}) - f(y_i)| + \sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(x_i)| &\leq \\ \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(y_i - x_i) \leq \varepsilon + \varepsilon(c - a) \end{aligned}$$

ε הוא מספר שרירותי לכן $|f(c) - f(a)| = 0$. $\square$

משפט. פונקציה f מוגדרת על $[a,b]$ היא אינטגרל לא מסויים של פונקציה אינטגרבילית על $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ f רציפה בהחלט על $[a,b]$.

הוכחה. כיוון אחד ידוע לנו. אינטגרל לא מסויים של פונקציה אינטגרבילית הוא רציף בהחלט.
נניח כי f רציפה בהחלט על הקטע $[a,b]$. f בעלת השתנות חסומה לכן גזירה כב"מ. יתר על כן, הנגזרת אינטגרבילית (כי חסומה). נסמן:

$$a \le x \le b g(x) := \int_a^x f'(t)dt$$

נתבונן בפונקציה,

$$\varphi(x) := g(x) - f(x)$$

פונקציה רציפה בהחלט.
כב"מ מתקיים:

$$\varphi'(x) := g'(x) - f'(x) = 0$$

עפ"י הלמה הקודמת φ קבועה על $[a,b]$.

$$\forall x \in [a,b] \quad g(x) - f(x) = \varphi(x) = \varphi(a) = g(a) - f(a) = 0 - f(a) = -f(a)$$

$$f(x) = f(a) + g(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

$\square$

תוצאה. נניח כי φ גזירה בקטע $[a,b]$ ו-φ' חסומה בקטע זה. אזי, לכל $x \in [a,b]$

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \int_a^x \varphi'(t)dt$$

הנוסחה היסודית של החשבון האינטגרלי שהכרנו כבר עבור נגזרות רציפות.

האינטגרל הזה הוא במובן של לבג. אפשר לכתוב את האינטגרל. ראינו כבר שהנגזרת היא פונקציה מדידה (גבול של סדרת פונקציות מדידות). וראינו דוגמא של נגזרת חסומה שלא אינטגרבילית לפי רימן.

הוכחה. ל-φ נגזרת חסומה ולכן היא רציפה בהחלט. היתר נובע מהמשפט.

$\square$

קיימת הרחבה של המשפט. מספיק ש- φ' תהיה אינטגרבילית לבג על הקטע (במקום חסומה) והמסקנה עדיין נכונה. אבל לא נוכיח. כי חבל להשקיע בזה עוד שעה.
נדבר קצת על מסילות.

הגדרה. $f:[0,1] \to \mathbb{R}^2$ רציפה נקראת מסילה.

אומרים שלמסילה יש אורך אם

$$\sup_{\Delta}\sum_{i=0}^{n_1}((x(t_{i+1})-x(t_i))^2+(y(t_{i+1}-y(t_i))^2)^{1/2}<\infty$$

כאשר
$\Delta : 0=t_0<t_1<\ldots<t_n=1$
למסילה יש אורך אם ורק אם המסילה היא בעלת השתנות חסומה.

$$\sum_{i=0}^{n-1}|x(t_{i+1})-x(t_i)|\le\sum_{i=0}^{n_1}((x(t_{i+1})-x(t_i))^2+(y(t_{i+1}-y(t_i))^2)^{1/2}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}|y(t_{i+1})-y(t_i)|\le\sum_{i=0}^{n_1}((x(t_{i+1})-x(t_i))^2+(y(t_{i+1}-y(t_i))^2)^{1/2}$$

מצד שני,

$$\sum_{i=0}^{n_1}((x(t_{i+1})-x(t_i))^2+(y(t_{i+1}-y(t_i))^2)^{1/2}\le\sum_{i=0}^{n_1}|(x(t_{i+1})-x(t_i)|+|y(t_{i+1}-y(t_i)|$$

תהי $0\le\tau\le1$ נסמן ב- $L(\zeta)$ האורך של $f|_{[0,\tau]}$
L היא פונקציה לא יורדת (קורא חרוץ מוזמן להוכיח). לכן, בן היתר, גזירה כב"מ.
נוכיח את המשפט הבא:

משפט. אם x,y רציפות בהחלט על $[0,1]$ אזי

$$L(1)=\int_0^1(x'(t)^2+y(t)^2)^{1/2}dt$$

למעשה במקום 1 אפשר לכתוב כל $0\le\tau\le1$.
עבור $0\le\alpha<\beta\le1$ נסמן:

$$\|f(\beta)-f(\alpha)\|:=((x(\beta)-x(\alpha))^2+(y(\beta)-y(\alpha))^2)^{1/2}$$

הוכחה. קיימת תת־ קב E וצה של $[0,1]$ בעלת מידה 0, כך שלכל $A:=[0,1]\setminus E$ x,y,L גזירות.
יהי $t\in A$, $h>0$. לפי ההגדרה:

$$\frac{L(t+h)-L(t)}{h}\ge\frac{\|f(t+h)-f(t)\|}{h}=$$
$$=((\frac{x(t+h)-x(t)}{h})^2+(\frac{y(t+h)-y(h)}{h})^2)^{1/2}$$

$$L'(t)\ge(x'(t)^2+y'(t)^2)^{1/2}$$

לכן,

$$L(1) = L(1) - L(0) \geq \int_0^1 L'(t)dt \geq \int_0^1 (x'(t)^2 + y'(t)^2)^{1/2}dt$$

L לא יורדת. ????
נותר להוכיח את אי־השוויון ההפוך.

טענה.

$$\|f(\beta) - f(\alpha)\| \leq \int_\alpha^\beta (x'(t)^2 + y'(t)^2)^{1/2}dt$$

אם נוכיח את זה נקבל את הדרוש. ניקח חלוקה $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ של הקטע $[0,1]$. נתבונן בסכום:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (x'(t)^2 + y'(t)^2)^{1/2}dt = \int_0^1 (x'(t)^2 + y'(t)^2)^{1/2}dt$$

זה נכון לכל חלוקה, בפרט לחסם העליון שהוא $L(1)$ ונקבל

$$L(1) \leq \int_0^1 (x'(t)^2 + y'(t)^2)^{1/2}dt$$

נותר רק להוכיח את הטענה.

$$\begin{aligned} K := \|f(\beta) - f(\alpha)\| = ((x(\beta) - x(\alpha))^2 + (y(\beta) - y(\alpha))^2)^{1/2} &\overset{1}{=} \\ = \left(\left(\int_\alpha^\beta x'(t)dt \right)^2 + \left(\int_\alpha^\beta y'(t)dt \right)^2 \right)^{1/2} & \end{aligned}$$

1 רציפות בהחלט
בטענה נוכל להניח כי K חיובי. הוא אי־שלילי ללא ספק אבל אם הוא 0 בכלל לא צריך לטרוח.
לכן נניח $K > 0$. נגדיר:

$$a := \frac{1}{K} \int_\alpha^\beta x'(t)dt$$

$$b := \frac{1}{K} \int_\alpha^\beta y'(t)dt$$

$$a^2 + b^2 = \frac{(x(\beta) - x(\alpha))^2 + (y(\beta) - y(\alpha))^2}{K^2}$$

$$K^2 = a^2 + b^2$$

לכן,

$$a^2 + b^2 = 1$$

נשים לב כי לכל t עפ"י קושי שוורץ,

$$|ax'(t) + by'(t)| \leq (a^2 + b^2)^{1/2}(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{1/2}$$

לכן,

$$K = a^2K + b^2K = a\int_\alpha^\beta x'(t)dt + b\int_\alpha^\beta y'(t)dy \leq \int_\alpha^\beta (x'(t)^2 + y'(t)^2)^{1/2}dt$$

$\square$

נניח כי x רציפה בהחלט על הקטע $[0,1]$. ניקח את המסילה $f := (x,0)$. מהו אורך המסילה הזאת?

$$L(1) = \sup_{\Delta} \sum_{i=0}^{n-1} |x(t_{i+1}) - x(t_i)| = T_0^1(x)$$

קיבלנו את ההשתנות הכללית.
כלומר עבור פונקציה רציפה בהחלט ההשתנות הכללית שווה לאינטגרל:

$$T_0^1(x) = \int_0^1 |x'(t)|dt$$