פונקציות ממשיות - הרצאה 15

7.12.10

f אינטגרבילית על $[a,b]$, $a \le x \le b$ אזי הפונקציה

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

היא רציפה ובעלת השתנות חסומה.
אם $F(x) = 0$ לכל $x \in [a,b]$ אזי $f = 0$ כב"מ.
נתחיל ממקרה מיוחד:

למה. נניח f מדידה וחסומה על $[a,b]$ (אז היא בוודאי אינטגרבילית). אזי עבור

$$\varphi(x) := \int_a^x f(t)dt$$

מתקיים $\varphi'(x) = f(x)$ כב"מ ב- $[a,b]$.

מקרה פרטי של הלמה מוכר לנו. אם האינטגרל רציף אנחנו יודעים ש- $\varphi'(x) = f(x)$ אפילו בכל נקודה.

הוכחה. הנגזרת של φ קיימת כב"מ. לכל $x > b$ נגדיר

$$\varphi(x) := \varphi(b)$$

עבור $a \le x \le b$:

$$\varphi_n(x) := n[\varphi(x + \frac{1}{n}) - \varphi(x)]$$

$\varphi_n(x) \to \varphi'(x)$ כב"מ.
נניח כי $M > 0$ מקיים $|\varphi(x)| \le M$, $\forall x \in [a,b]$. אזי

$$\varphi_n(x) = n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt$$

בפרט, לכל n ולכל $x \in [a,b]$,

$$|\varphi_n(x)| = \left| n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt \right| \le n \cdot \frac{1}{n} \cdot M = M$$

נשתמש במשפט ההתכנסות החסומה כדי להוכיח שלכל $x \in [a,b]$ מתקיים

$$\int_a^x \varphi'(t)dt = \int_a^x f(t)dt$$

ואם זה נכון, אזי עפ"י הלמה שהוכחנו קודם ועפ"י השוויון:

$$\int_a^x [\varphi'(t) - f(t)]dt = 0, \forall x \in [a,b]$$

$\varphi'(t) - f(t) = 0$ כב"מ.
מדוע זה נכון?

$$\int_a^x \varphi'(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^x \varphi_n(t)dt = \lim_{n\to\infty} n\left[\int_a^x \varphi(t+\frac{1}{n}) - \varphi(t))dt\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[\int_a^x \varphi(x+\frac{1}{n})dt - \int_a^x \varphi(t)dt\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[n\int_{a+1/n}^{x+1/n} \varphi(t)dt - \int_a^x \varphi(t)dt\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[\int_x^{x+1/n} \varphi(t)dt - \int_a^{a+1/n} \varphi(t)dt\right] \overset{*}{=} \varphi(x) - \varphi(a) = \int_a^x f(t)dt$$

(*) נובע מרציפות φ.

$\square$

משפט. יהיו f אינטגרבילית על $[a,b]$ ו-

$$a \le x \le b, \quad \varphi(x) := \int_a^x f(t)dt$$

אזי $\varphi' = f$ כב"מ.

הוכחה. ללא הגבלת הכלליות נניח כי f אי־שלילית $f \ge 0$ (אחרת נשתמש עבור f^+, f^-).
φ לא יורדת לכן $\int_a^b \varphi'(t)dt \le \varphi(b) - \varphi(a)$
נגדיר:

$$f_n(x) := \begin{cases} f(x), & 0 \le f(x) \le n \\ n, & f(x) > n \end{cases}$$

f_n חסומה, $f_n(x) \uparrow f(x) \forall x$ $f - f_n \ge 0$

$$g_n(x) := \int_a^x (f(t) - f_n(t))dt$$

פונקציה לא יורדת.

$$g_n(x) = \varphi(x) - \int_a^x f_n(t)dt$$

במילים אחרות

$$\varphi(x) = g_n(x) + \int_a^x f_n(t)dt$$

$$\varphi'(x) = g_n'(x) + \frac{d}{dx}\int_a^x f_n(t)dt$$

כב"מ הנגזרות קיימות
מהלמה הקודמת:

$$\varphi'(x) = g_n'(x) + f_n(x) \geq f_n(x)$$

כב"מ.

$$\varphi'(x) \geq f_n(x)$$

כב"מ.

$$\varphi'(x) \geq f(x)$$

כב"מ.
לכן,

$$\int_a^b \varphi'(t)dt \geq \int_a^b f(t)dt = \varphi(b) - \varphi(a)$$

$$\int_a^b \varphi'(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

$$\int_a^b [\varphi'(t) - f(t)]dt = 0$$

$$\int_a^b [\varphi'(t) - f(t)]dt \geq 0$$

כב"מ לכן

$$\varphi'(t) = f(t)$$

כב"מ.

□

תזכורת פונקציה f על $[a,b]$ רציפה בהחלט אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ בעל התכונה:
לכל אוסף של קטעים $\{[x_i, y_i]_{i=1}^n\}$ זרים בזוגות המוכלים ב- $[a,b]$ והמקיים

$$\sum_{i=1}^n (y_i - x_i) \le \delta$$

מקיים

$$\sum_{i=1}^n (f(y_i) - f(x_i)) \le \varepsilon$$

הערה. ניתן לקחת גם אוסף בן מניה של קטעים.

כל פונקציית ליפשיץ על $[a,b]$ היא רציפה בהחלט על $[a,b]$ ובפרט כל פונקציה גזירה עם נגזרת חסומה.
כל אינטגרל לא מסויים.
אם f אינטגרבילית על $[a,b]$ אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ המקיים
$\int_E |f|dt \le \varepsilon$ אם $E \subseteq [a,b]$, $m(E) < \delta$

$$\varphi(x) := \int_a^x f(t)dt$$

$$\sum_{i=1}^n |\varphi(y_i) - \varphi(x_i)| \le \sum_i \int_{x_i}^{y_i} ..|...|... = \int_{\bigcup_{i=1}^n [x_j, y_j]} |f(t)dt| \le \varepsilon$$

תכונה נוספת:

למה. כל פונקציה רציפה בהחלט על $[a,b]$ היא בעלת השתנות חסומה על $[a,b]$ (ובפרט גזירה בכל מקום).

טבעי לשאול האם כל פונקציה רציפה עם השתנות חסומה היא רציפה בהחלט? לא. הדוגמא הנגדרית היא שוב פונקציית קנטור.