פונקציות ממשיות - הרצאה 14

30.11.10

תזכורת:
תהי פונקציה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ וחלוקה $\Delta : a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$. אזי הגדרנו:

$$t_\Delta := \sum_{i=0}^{n} |f(x_{i+1}-f(x_i)|$$

$$T_a^b(f) := \sup_\Delta t_\Delta$$

אמרנו שפונקציות בעלות השתנות חסומה בקטע מסויים מהוות מרחב לינארי (ובוודאי קורא חרוץ בדק זאת) ולכן כל פונקציה עם השתנות חסומה היא הפרש של שתי פונקציות יורדות.
ראינו בתרגול דוגמא לפונקציה שהנגזרת שלה אינה אינטגרבילית לבג, למרות שאנחנו יודעים בוודאות שיש לה קדומה. אבל זאת כבר התקדמות מאינטגרל רימן כי הנגזרת לפחות חסומה.
יש אינטגרל הנקרא Henstock-Kurzweil-Denjoy-Perron שפותר גם את הבעיה הזאת.
הבעיה איתו היא שפונקציה יכולה להיות אינטגרבילית בלי שהערך המוחלט שלה אינטגרבילי.
וזה עושה צרות כי זה לא סימפטי וכי לא נוכל למדוד מרחק בין פונקציות אינטגרביליות – הפרש הערכים המוחלטים.
לכן נחזור לדבר על אינטגרל לבג.
תזכורת: לכל $a\in\mathbb{R}$:

$$a^+ := \max(a,0)$$

$$a^- := \max(-a,0)$$

$$a = a^+ - a^-$$

$$|a| = a^+ + a^-$$

עבור החלוקה Δ נוסיף ונגדיר:

$$p_\Delta := \sum_{i=0}^{n} (f(x_{i+1}-f(x_i))^+ \geq 0$$

$$n_\Delta := \sum_{i=0}^{n} (f(x_{i+1} - f(x_i))^- \geq 0$$

$$p_\Delta - n_\Delta = \sum_{i=0}^{n} (f(x_{i+1} - f(x_i)) = f(b) - f(a)$$

$$p_\Delta + n_\Delta = t_\Delta$$

$$P_a^b := \sup_\Delta p_\Delta$$

$$N_a^b := \sup_\Delta n_\Delta$$

אם f בעלת השתנות חסומה המספרים האלה אי־שלילים.

משפט. תהי f בעלת השתנות חסומה על $[a, b]$. אזי

$$P_a^b - N_a^b = f(b) - f(a)$$

$$P_a^b + N_a^b = T_a^b$$

הוכחה. לכל Δ:

$$p_\Delta \leq N_a^b + (f(b) - f(a))$$

לכן בוודאי גם,

$$P_a^b \leq N_a^b + (f(b) - f(a))$$

מצד שני,

$$n_\Delta = p_\Delta + (f(a) - f(b)) \leq P_a^b + (f(a) - f(b))$$

לכן,

$$N_a^b \leq P_a^b + (f(a) - f(b))$$

נעביר אגף,

$$P_a^b - N_a^b \geq f(b) - f(a)$$

ומההגדרה,

$$P_a^b - N_a^b \leq f(b) - f(a)$$

לכן,
$$P_a^b - N_a^b = f(b) - f(a)$$

כעת לכל Δ (ממש מההגדרה),

$$p_\Delta = t_\Delta - p_\Delta + (f(b) - f(a))$$

$$2p_\Delta = t_\Delta + (f(b) - f(a)) \leq T_a^b + (f(b) - f(a))$$

בפרט,
$$P_a^b + P_a^b \leq T_a^b + (f(b) - f(a))$$

נעביר אגף,
$$P_a^b + N_a^b \leq T_a^b$$

כעת, לכל Δ,

$$t_\Delta = p_\Delta + n_\Delta \leq P_a^b + N_a^b$$

כלומר,
$$T_a^b \leq P_a^b + N_a^b$$

תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ויהי $a \leq x \leq b$ אזי, $x \to P_a^x(f)$ עבור $a \leq x \leq b$
לכן,
$$x \to N_a^x(f)$$

אינן יורדות.

$\square$

משפט. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ היא בעלת השתנות חסומה $\Leftrightarrow$ היא הפרש של שתי פונקציות לא יורדות על $[a,b]$.

הוכחה. נניח כי f בעלת השתנות חסומה. $\forall x \in [a,b]$

$$f(x) - f(a) = P_a^x - N_a^x$$

$$f(x) = P_a^x - (N_a^x - f(a)))$$

$\square$

תוצאה. כל פונקציה בעלת השתנות חסומה על $[a,b]$ היא גזירה כב"מ והנגזרת שלה אינטגרבילית על $[a,b]$.
רמז: כותבים את f כהפרש שתי פונקציות לא יורדות

האינטגרל הלא מסויים

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטרגבילית.

$$a\le x\le b$$

$$F(x):=\int_a^x f(t)dt$$

למה. F רציפה על $[a,b]$ ובעלת השתנות חסופה על $[a,b]$.

הוכחה. עבור כל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ המקיים: אם $E\subseteq[a,b]$ מדידה, $m(E)<\delta$ אזי

$$\left|\int_E f(t)dt\right|<\varepsilon$$

נניח כי $a\le x_1\le x_2\le b$

$$0\le x_2-x_1<\delta$$

$$|F(x_2)-F(x_1)|=\left|\int_a^{x_2} f(t)dt-\int_a^{x_1} f(t)dt\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right|<\varepsilon$$

לכן רציפה.

$$X:a\le x_0<x_1<\ldots<x_n=b$$

$$\sum_{i=0}^n|F(x_{i+1})-F(x_i)|=\sum_{i=0}^n\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt\right|\le\sum_{i=0}^n\int_{x_i}^{x_{i+1}}|f(t)|dt=\int_a^b|f(t)|dt$$

$$T_a^F\le\int_a^b|f(t)|dt$$

□

למה. (X,Σ,μ) מרחב מידה, תהי f אינטגרבילית וחיובית על $E\in\Sigma$. אם $m(E)>0$ אזי $\int_E f(x)d\mu>0$

הוכחה. יהי $p\in\mathbb{N}$. נגדיר:

$$E_p:=\{x\in E:f(x)>\frac{1}{p}\}$$

כעת,

$$E=\bigcup_p E_p$$

$\exists p$ עבורו $m(E_p) > 0$.

$$\int_E f d\mu \geq \int_{E_p} f d\mu \geq \frac{1}{p} \cdot \mu(E_p) > 0$$

$\square$

למה.

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

אם $\forall x \in [a,b]$

$$\int_a^x f(t)dt = 0$$

אזי $f = 0$ כב"מ.

הוכחה. בדרך השלילה. נגדיר,

$$E := \{x \in [a,b] : f(x) \neq 0\}$$

כמובן אפשר לכתוב:

$$E_1 = \{x : f(x) > 0\}$$

$$E_2 = \{x : f(x) < 0\}$$

$$E = E_1 \cup E_2$$

נניח בשלילה ש- $m(E_1) > 0$.
אז קיימת $F \subseteq E_1$ סגורה כך ש-

$$m(E \setminus F) < \frac{1}{2} m(E_1)$$

$$M(F) > \frac{1}{2} m(E_1) > 0$$

נסמן,

$$G := [a,b] \setminus F$$

$$\int_G f dm = \int_a^b f dm - \int_F f dm$$

$$\int_G g dm = -\int_F f dm \neq 0$$

מאידך $[a,b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n) \setminus G$,
הקטעים זרים בזוגות לכן,

$$\int_G f dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} [\int_a^{b_n} - \int_a^{a_n}] = 0$$

סתירה. $\square$