פונקציות ממשיות - הרצאה 13

28.11.10

נתחיל מלהשלים חובות מההרצאה הקודמת.
אמרנו שמשפחה F של קטעים לא מנוונים מכסה את הקבוצה $E \subseteq \mathbb{R}$ לפי Vitali אם לכל $x \in E$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיים $I \in F$ המקיים $x \in I$ כך ש- $l(I) < \varepsilon$.

למה. ***(Vitali)*** תהי E בעלת מידה סופית המכסה לפי V ע"י המשפחה F. לכל $\varepsilon > 0$ קיימים $\{I_j\}_{j=1}^N \subseteq F$ זרים בזוגות המקיימים:

$$m^*(E \setminus \bigcup_{j=1}^N I_j) < \varepsilon$$

תחילה נוכיח למה אחרת:

למה. נניח כי f אינה יורדת על $E \subseteq [a,b]$ ומקיימת $UDf(x) > s > 0$ לכל $x \in E$ אזי

$$m^*(f(E)) > sm^*(E)$$

תזכורת:

$$UDf(x) := \limsup_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

הוכחה. הוכחנו משפט דומה בשיעור הקודם. לכן יהיו נימוקים שלא נחזור עליהם.
כמו בהוכחה הקודמת אפשר להניח ש- f רציפה בכל נקודות E.
יהי $\varepsilon > 0$. קיימת G פתוחה המקיימת $f(E) \subseteq G$ ו- $m(G) < m^*(f(E)) + \varepsilon$.
בפרט $m(G) < \infty$ כי $m^*(f(E))$ סופית, היות ומוכלת בקטע $[f(a), f(b)]$.
נתבונן בקבוצת כל הקטעים

$$\left\{[x, x+h] : h \neq 0, x \in E, \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > s, [f(x), f(x+h)] \subseteq G\right\}$$

אלה קטעים לא מנוונים כי שונים מאפס. יתר על כן, המשפחה הזאת מכסה את E לפי V.
אזי עפ"י הלמה של V קיימים $\{h_j\}_{j=1}^N$ ו- $\{x_j\}_{j=1}^N$
המקיימים:

$$m^*(E \setminus \bigcup_{j=1}^N [x_j, x_j + h_j]) < \varepsilon$$

כאשר הקטעים $\left\{[x_j, x_j + h_j]\right\}_{j=1}^N$ זרים בזוגות.

$$(*)\quad m^*(E) \le m^*(E \setminus \bigcup_{j=1}^{N}[x_j, x_j+h_j]) + m^*(\bigcup_{j=1}^{N}[x_j, x_j+h_j]) <$$

$$< \varepsilon + \sum_{j=1}^{N}|h_j| \overset{1}{<} \varepsilon + \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{N}|f(x_j+h_j) - f(x_j)|$$

1 לפי: עבור $1 \le j \le N$:

$$\frac{f(x_j+h_j) - f(x_j)}{h_j} > s$$

מצד שני, $\{[f(x_j), f(x_j+h_j)\}$ אינם זרים אבל יש לכל היותר נקודה אחת משותפת, בגלל שהקטעים $[x_j, x_j+h_j]$ זרים, הפונקציה שלנו אינה יורדת, אז $x_1 + h_1 < x_2$ או $x_2 + h_2 < x_1$ אם אפשרות לקצוות משותפים.
לכן,

$$(**)\quad \sum_{j=1}^{N}|f(x_j+h_j) - f(x_j)| = \sum_{j=1}^{N} l[(f(x_j), f(x_j+h_j)]) =$$

$$= m(\bigcup_{j=1}^{N}[f(x_j), f(x_j+h_j)]) \le m(G) < m^*(F(E)) + \varepsilon$$

מ- $(*), (**)$ נסיק כי,

$$m^*(E) < \varepsilon + \frac{1}{s}[m^*(f(E)) + \varepsilon]$$

ולכן,

$$m^*(E) \le \frac{1}{s}m^*(f(E))$$

$\square$

נוכיח כעת את הלמה של V.

הוכחה. ללא הגבלת הכלליות נניח כי F מורכבת מקטעים סגורים. (אחרת נוסיף את הקצוות, ומספר סופי של נקודות לא משנה את המידה).
קיימת G פתוחה המקיימת $E \subseteq G$ וכן,

$$m(G) < m^*(E) + 1 < \infty$$

תהי F' תת־משפחה של F המורכבת מכל הקטעים המוכלים ב–G. F לא סתם לא ריקה, אלא מכסה את E לפי V.
מדוע? כי לכל $x \in E$ מתקיים $x \in (\alpha, \beta) \subseteq G$. יש קטע ב–$F$ קטן כרצוננו המכיל את x אז נוכל לבחור אותו מוכל בקטע (α, β).
נבחר סדרה של קטעים זרים בזוגות $\{I_n\}$ ב- F' באופן הבא:
יהי $I_1 \in F'$ שרירותי.
נניח כי $I_1, \ldots, I_n$ נבחרו.

1. אם $\bigcup_{j=1}^{n} I_j \supseteq E$ עוצרים.

2. $E \setminus \bigcup_{j=1}^n I_j \neq \varnothing$. עבור $x \in E \setminus \bigcup_{j=1}^n I_j \neq \varnothing$, המרחק בין x לאיחוד הוא חיובי לכן יש קטע $I \in F'$ מספיק קטן שמכיל את x ולא חותך את האיחוד $\bigcup I_j$.

נסמן,

$$k_n := \sup\{l(I) : I \in F', I \cap (\bigcup_{j=1}^n I_j) = \varnothing)\}$$

$0 < k_n < \infty$ כי כל המספרים חיוביים וכל I_j מוכל ב– G. יהי I_{n+1} קטע מ- F' שאינו חותך את $\bigcup_{j=1}^n I_j$ המקיים $l(I_{n+1}) > \frac{k_n}{2}$.

כעת נחזור על התהליך עם הקבוצה $I_1, \ldots, I_{n+1}$.

אם הסדרה סופית - סיימנו.

נניח שהסדרה אינסופית. $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ הקטעים זרים בזוגות ולכל קטע החל מ- $n = 1$ $l(I_{n+1}) > \frac{k_n}{2}$.

$$\sum_{n=1}^\infty I_n = m(\bigcup_{n=1}^\infty I_n) \leq m(G) < \infty$$

לכן הטור באגף השמאלי ביותר מתכנס. לכן, $k_n \to 0$ וקיים N עבורו,

$$\sum_{p=N+1}^\infty l(I_p) < \frac{\varepsilon}{5}$$

אזי $\{I_j\}_{j=1}^N$ מקיימים את הדרוש.

לכל $p \geq N+1$ ניקח קטע L_p קטע בעל אותו מרכז כמו של p אך $l(L_P) = 5 \cdot l(p)$.

נניח כי מתקיימת ההכלה הבאה:

$$E \setminus \bigcup_{j=1}^N I_j \subseteq \bigcup_{p=N+1}^\infty L_p$$

כעת,

$$m^*(E \setminus \bigcup_{p=1}^N I_p) \leq m(\bigcup_{N+1}^\infty L_p) \leq \sum_{N+1}^\infty l(L_p) = 5 \sum_{N+1}^\infty l(I_p) < \varepsilon$$

נותר רק להוכיח את ההכלה. יהי $x \in E \setminus \bigcup_{j=1}^N I_j$. יש קטע מספיק קטן $I \in F'$, $x \in I$,

$$I \cap (\bigcup_{j=1}^N I_j) = \varnothing$$

לכן I מגדיר את k_N, לכן

$$k_N \geq l(I) > 0$$

קיים p המקיים $l(I) > k_p$. $\Leftarrow$ בהכרח $p > N$. לכן, I אינו משתתף בהגדרת k_p:

$$I \cap (\bigcup_{j=1}^p I_j) = \varnothing$$

יהי r הקטן ביותר עבורו $l(I) > k_r$. $\Leftarrow$

$$I \cap (\bigcup_{j=1}^{r} I_j) \neq \varnothing$$

r הוא הקטן ביותר לכן,

$$I \cap (\bigcup_{j=1}^{r-1} I_j) = \varnothing$$

לכן $l(I) \leq k_{r-1} < 2l(I_r)$.
בהכרח $I \cap I_r \neq \varnothing$. אנחנו יודעים ש- $l(I) < 2l(I_r)$ לכן אם ננפח את I_r 5 פעמים, אז בהכרח נכסה את I.
לכן $x \in I \subset L_r$
לכן מצאנו $n < r$ כך ש- $x \in L_r$. $\square$

משפט. תהי $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ לא יורדת. אזי f' אינטגרבילית על $[a, b]$ ו-

$$\int_a^b f' dx \leq f(b) - f(a)$$

הערה. ממשפט לבג נגזרת של פונקציה לא יורדת קיימת כב"מ. בשאר המקומות נגדיר את ה"נגזרת" להיות מספר אי־שלילי כלשהו.

למה. תהי $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ מדידה, גזירה כב"מ. אזי f' מדידה.

הוכחה.

$$f(x) := \begin{cases} f(x), & a \leq x \leq b \\ f(b), & b \leq x \leq b+1 \end{cases}$$

עבור $a \leq x \leq b$

$$f_n(x) := n \cdot [f(x + \frac{1}{n}) - f(x)]$$

f_n מדידה על $[a, b]$. $f_n \to f'$ כב"מ, לכן f' מדידה כי מידת לבג היא שלמה. $\square$

הוכחה. תהי f_n כנ"ל. $\forall n f_n \geq 0$ לכן $f' > 0$
מהלמה של פטו:

$$\int_a^b f'(x) dx \leq \liminf n \int_a^b [f(x + \frac{1}{n}) - f(x)] dx$$

$$\int_a^b [f(x + \frac{1}{n}) - f(x)] dx = \int_{a+1/n}^{b+1/n} f(x) dx - \int_a^b f(x) dx =$$

$$= \int_b^{b+1/n} f(x) dx - \int_a^{a+1/n} f(x) dx \leq \frac{f(b)}{n} - \frac{f(a)}{n}$$

לכן,

$$\liminf n\int_a^b [f(x+\frac{1}{n})-f(x)]dx \le f(b)-f(a)$$

□

מה עם שוויון? באינטגרל רימן היה לנו שיוויון. אבל כאן לפעמים אין שוויון:

$$f(x):=\begin{cases}0, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 1, & \frac{1}{2}<x\le 1\end{cases}$$

$$f'(x)\equiv 0$$

אבל $f(1)-f(0)=1$. יש אי שוויון חריף.
יש שיגידו שזה לא חוכמה כי הפונקציה היא מדרגות ולא רציפה. אבל יש פונקציות רציפות שעבורן יש אי־שוויון חריף. לדוגמא פונקציית קנטור φ_C.
$\varphi_C'=0$ כב"מ אבל $\varphi_C(1)=1$, $\varphi_C(0)=0$, ושוב אי־שוויון חריף.

הגדרה. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ניקח $\Delta=a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ חלוקה כלשהי. נגדיר:

$$t_\Delta(f):=\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|$$

ההשתנות הכללית של f על $[a,b]$ מוגדרת להיות:

$$T_a^b(f):=\sup_\Delta t_\Delta(f)$$

אם $T_a^b(f)<\infty$ אזי f נקראת פונקציה בעלת השתנות חסומה.

דוגמאות: כל פונקציה לא יורדת - פשוט נקבל סכום טלסקופי וממנו

$$T_a^b(f)=f(b)-f(a)$$

.
כמו כן, כל פונקציה גזירה ב־$[a,b]$ בעלת נגזרת חסומה. $|f'|<M$,

$$t_\Delta(f)\le\sum_{i=0}^{n-1}M(x_{i+1}-x_i)\le M(b-a)$$

קורא חרוץ מוזמן לא להאמין למשפט הבא ולנסות להוכיח אותו לבד.
משפחת הפונקציות בעלות השתנות חסומה מהווה מרחב לינארי.
האם בכלל קיימות פונקציות שההשתנות שלהן לא חסומה? בוודאי.

$$f(x):=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & 0<x\le 1\\ 0, & x=0\end{cases}$$

פונקציה רציפה שאיננה בעלת השתנות חסומה.

קורא חרוץ אף יוכיח את זה.
לשם כך הוא עלול להזדקק לרמז הבא: אפשר להשתמש בחלוקה:

$$\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{1}{(2n-1)\pi + \frac{\pi}{2}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2\pi + \frac{\pi}{2}}$$