פונקציות ממשיות ־ הרצאה 12

23.11.10

ראינו משפטי גבול הרבה יותר טובים מאלה שיש על אינטגרל רימן. עכשיו נדון על הישר הממשי ומידת לבג. נתחיל מהקשר בין אינטגרל לגזירה. לפונקציה רציפה הנגזרת של האינטגרל הלא מסויים הוא הפונקציה. לאינטגרל לבג יש יתרון גם כאן. ראינו בתרגול דוגמא של נגזרת חסומה שאינה אינטגרבילית לפי רימן.
מטרה ראשונה ־ להוכיח שכל פונקציה מונוטונית גזירה כב"מ. ראינו כבר בתרגיל שלפונקציה מונוטוית מספר נקדודת האי ריצפות הוא בן מניה. אבל נצטרך הכנה רחבה:

הגדרה. $E \subseteq \mathbb{R}$. משפחת F של קטעים לא מנוונים מכסה את E לפי Vitali אם לכל $x \in E$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיים $I \in F$ המקיים: $x \in I$, ε ,$l(I) < \varepsilon$.

למה. ***(Vitali)***
תהי $E \subseteq \mathbb{R}$ שמקיימת $m^*(E) < \infty$.
אם F מכסה את E לפי $Vitali$ אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיימים $\{I_j\}_{j=1}^N$ זרים שתיים־שתיים המקיימים
:

$$m^*(E \setminus \bigcup_{j=1}^N I_j) < \varepsilon$$

לא נוכיח את הלמה היום. רק נשתמש בה.
עוד שני מושגים:
נשתמש בסימון הבא $[\alpha, \beta]$ בשביל לסמן קטע. למה אנחנו בכלל מזכירים את זה? לעיתים לא נהיה בטוחים האם $\beta < \alpha$ או שמה $\alpha < \beta$. בכל מקרה נכתוב $[\alpha, \beta]$ וכולם יבינו למה הכוונה.
תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ויהי $x \in [a,b]$.
נגדיר:

$$UDf(x) := \limsup_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$LDf(x) := \liminf_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

f גזירה ב־x $\Leftrightarrow$ $UDf(x) = LDf(x)$ וזה מספר סופי.
כמובן שתמיד $LDf(x) \leq UDf(x)$.

למה. תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ עולה ממש ותהי $E \subseteq [a,b]$. נניח כי קיים מספר r המקיים $LDf(x) < r$ לכל $x \in E$. אזי,

$$m^*(f(E)) \leq rm^*(E)$$

הוכחה. יהי $\varepsilon > 0$ קיימת G פתוחה המקיימת $E \subseteq G$ ו- $m(G) < m^*(E) + \varepsilon$.
אפשר להניח כי f רציפה בכל נקודות E. מדוע? נזרוק את כל נקודות אי־הרציפות של f. זרקנו לכל היותר קבוצה בת־מניה, לכן המידה החיצונית לא משתנה, לא של E ולא של $f(E)$.
ניתן לומר כי $f(E) \subseteq [f(a), f(b)]$ בפרט $m^*(f(E)) < \infty$.
לכל $x \in E$ קיימים $h \neq 0$ קטנים כרצוננו (בערך מוחלט) המקיימים:
$[x, x+h] \subseteq G \cap [a, b]$

$$0 \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < r$$

כלומר יש סדרה של h ששואפת ל־0, אף אחד מאיבריה אינו 0 והיא מקיימת את התנאים.
נתבונן במשפחת כל הקטעים

$$F := \{[f(x), f(x+h)] : x \in E, \text{כנ"ל } h\}$$

מכסה את $f(E)$ לפי V. מדוע יש קטעים כאלה קטנים כרצוננו? כי f רציפה בכל הנקודות של E.
מהמסקנה קיימים קטעים $\left\{ \left[f(x_j), f(x_j+h_j) \right] \right\}_{j=1}^{N}$ ב- F זרים שתיים־שתיים, המקיימים :

$$m^* \left(f(E) \setminus \bigcup_{j=1}^{N} [f(x_j), f(x_j+h_j)] \right) < \varepsilon$$

מתקיים לכל $1 \leq j \leq N$

$$\frac{f(x_j+h_j) - f(x_j)}{h_j} < r$$

$$m^*(f(E)) \leq \sum_{j=1}^{N} |f(x_j+h_j) - f(x_j)| + \varepsilon < r \sum_{j=1}^{N} |h_j| + \varepsilon \tag{1}$$

גם הקטעים $\{[x_j, x_j+h_j]\}$ זרים שתיים־שתיים כי f פונקציה עולה.

$$\bigcup_{j=1}^{N} [x_j, x_j+h] \subseteq G$$

לכן,

$$\sum_{j=1}^{N} |h_j| \leq m(G) \tag{2}$$

$$m^*(f(E)) < rm(G) + \varepsilon < r(m^*(E) + \varepsilon) + \varepsilon$$

$$m^*(f(E)) \leq rm^*(E)$$

$\square$

למה. יהיו $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ לא יורדת, $E\subseteq[a,b]$ אם קיים $s>0$ המקיים: אם $UDf(x)>s$ לכל $x\in E$
אזי $m^*(f(E))\geq sm^*(E)$
את ההוכחה נראה שיעור הבא.
במקום זה נוכיח את הלמה הבאה:

משפט. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ לא יורדת. אזי f גזירה כב"מ ב- $[a,b]$.

הוכחה. מספיק להוכיח רק עבור פונקציות עולות. מדוע?
כי אם ניקח $\hat{f}:=x+f(x)$ זאת פונקציה עולה. היא גזירה בדיוק באותן הנקודות בהן f גזירה.
נתבונן בקבוצה $E:=\{x\in[a,b]:UDf(x)=\infty\}$
יהי $s>0$ כלשהו. אז לכל $x\in E$ $UDf(x)>s$
אז

$$f(b)-f(a)\geq m^*(f(E))\geq sm^*(E)$$

וזה לכל $s>0$
לכן $m^*(E)=0$
UDf,NDf אינסוף בקבוצה ממידה 0

$$A:=\{x\in[a,b]:LDf(x)<UDf(x)\}$$

יהיו $r,s\in\mathbb{Q}$

$$A_{r,s}:=\{x\in[a,b]:LDf(x)<r<s<UDf(x)\}$$

$$A=\bigcup_{r<s,r,s\in\mathbb{Q}}A_{r,s}$$

איחוד בן מניה.
נשתמש בשתי הלמות:
עפ"י הראשונה

$$m^*(f(A_{r,s}))\leq rm^*(A_{r,s})$$

מהשנייה

$$sm^*(A_{r,s})\leq m^*(f(A_{r,s}))$$

אם המידה החיצונית של $A_{r,s}$ חיובית אז $s>r$ בסתירה.
לכן $m^*(A_{r,s})=0$ ולכן $m^*(A)=0$ $\square$