פונקציות ממשיות - הרצאה 11

21.11.10

הגדרנו אינטגרל לפונקציות מדידות אי־שלילות. נעבור לפונקציות מדידות.
(X,Σ,μ) מרחב מידה ותהי f מדידה.

$$f^+ := f \vee 0$$

$$f^- := (-f) \vee 0 = -(f \wedge 0)$$

שתיהן פונקציות מדידות, אי־שליליות, וכן

$$f = f^+ - f^-$$

הגדרה. נאמר כי f אינטגרבילית אם f^+, f^- אינטגרביליות ו־

$$\int\limits_x f d\mu := \int\limits_x f^+ d\mu - \int\limits_x f^- d\mu$$

אם במקרה f אי־שלילית אז ההגדרה מזדהה אם ההגדרה הקודמת כיוון שאז $f^- = 0$.
אם f חסומה ומתאפסת מחוץ לקבוצה ממדיה סופית האינטגרל שלה מקבל אותו הערך גם לפי ההגדרה הזאת וגם לפי הקודמת.
מדוע? f^+, f^- שתהין חסומות, מדידות מתאפסות מחוץ לקבוצה ממידה אפס ומלינאריות האינטגרל יש הזדהות.
נראה כרגיל קצת תכונות:

למה. נניח כי f_1, f_2 מדידות, אי־שליליות ו־ $f = f_1 - f_2$, f_1, f_2 אינטגרביליות אזי גם f אינטגרבילית וכן

$$\int f d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu$$

הערה. הגדרנו אינטגרביליות לפי הפרש של שתי פונקציות מיוחדות. כאן אנחנו אומרים שלא משנה איך נחלק, העיקר שהפונקציות תהיינה מדידות אי שליליות.

הוכחה. מהגדרת אינטגרביליות $\int f_j d\mu < \infty$ עבור $j = 1, 2$. מתקיים:

$$f_1 \geq f^+$$

$$f_2 \geq f^-$$

מדוע? תחשבו שהיו כאן מספרים.
מכאן,

$$\int f^+ d\mu \leq \int f_1 d\mu$$

$$\int f^- d\mu \leq \int f_2 d\mu$$

לכן $\int f^+ d\mu < \infty, \int f^- d\mu < \infty$ ובשלווה נסיק כי f אינטגרבילית.
מצד שני,

$$f_1 - f_2 = f^+ - f^-$$

$$f_1 + f^- = f^+ + f_2$$

כאן יש פונקציות מדידות אי־שליליות בשני האגפים. נסיק:

$$\int f_1 d\mu + \int f^- d\mu = \int f^+ d\mu + \int f_2 d\mu$$

הכל מספרים סופיים.
לכן,

$$\int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \int f d\mu$$

□

משפט. יהיו f, g אינטגרביליות. $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. αf אינטגרבילית ו־ $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$.

   הוכחה. אם $\alpha = 0$ ברור.
   נניח $\alpha > 0$

$$(\alpha f)^+ = \alpha f^+$$

$$(\alpha f)^- = \alpha f^-$$

קיבלנו פוקנציות מדידות אי־שליליות, לכן אינטגרביליות, וכן

$$\int \alpha f^+ d\mu = \alpha \int f^+ d\mu$$

$$\int \alpha f^- d\mu = \alpha \int f^- d\mu$$

נניח $\alpha < 0$

$$(\alpha f)^+ = -\alpha f^+$$

$$(\alpha f)^- = -\alpha f^-$$

קיבלנו פוקנציות מדידות אי־שליליות, לכן אינטגרביליות, וכן

$$\int \alpha f^+ d\mu = -\alpha \int f^+ d\mu$$

$$\int \alpha f^+ d\mu = -\alpha \int f^+ d\mu$$

$\square$

2. $f + g$ אינטגרבילית וכן

$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$$

הוכחה.

$$f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^- = (f^+ g^+) - (f^- + g^-)$$

כתבנו את $f + g$ כסכום של שתי פונקציות אי־שליליות אינטגרביליות. לכן מהלמה נובע.

$$\int (f+g) d\mu = \int (f^+ + g^+) d\mu + \int g(f^- + g^-) d\mu =$$
$$= \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$$

$\square$

3. אם $g \geq f$ כב"מ אזי $\int g d\mu \geq \int f d\mu$

הוכחה.

למה. (קטנה)

נניח $h \geq 0$ כב"מ אינטגרבילית. אזי $\int h d\mu \geq 0$

מדוע? $h^- = 0$ כב"מ לכן $\int h^- d\mu = 0$. לכן,

$$\int h d\mu = \int h^+ d\mu - \int h^- d\mu = \int h^+ d\mu \geq 0$$

כעת, $f - g \geq 0$ כב"מ ואינטגרבילית (מלינאריות שכבר הוכיחנו) לכן מהלמה הקטנה

$$\int (f-g) d\mu \geq 0$$

שוב מלינאריות

$$0 \leq \int (f-g) d\mu = \int f d\mu - \int g d\mu$$

□

4. $f = g$ כב"מ אזי, $\int f d\mu = \int g d\mu$ תוצאה מידית של הסעיף הקודם.
5. $|f|$ אינטגרבילית וכן –

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$$

הוכחה.

$$|f| = f^+ + f^-$$

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

כמו למספרים,

לכן,

$$-\int |f| d\mu \leq \int f d\mu \leq \int |f| d\mu$$

□

6. $E \in \Sigma$ אזי f אינטגרבילית על E.

הוכחה. נתבונן ב–

$$(E, \Sigma_E, \mu|_{\Sigma_E})$$

אז,

$$(f\big|_E)^+ = f^+\big|_E$$

$$(f\big|_E)^- = f^-\big|_E$$

ולפי ההגדרה:

$$\int_E f d\mu := \int_X f\chi_E d\mu$$

$\square$

7. אם $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ ב־ Σ
זרות שתיים־שתיים ו־ $X = \bigcup E_i$ אזי

$$\int_X f d\mu = \sum_i \int_{E_i} f d\mu$$

הוכחה.

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ - \int_X f^- d\mu =$$

$$= \sum_i \int_{E_i} f^+ d\mu - \sum_i \int_{E_i} f^- d\mu =$$

$$= \sum_i (\int_{E_i} f^+ d\mu - \int_{E_i} f^- d\mu) = \sum_i \int_{E_i} f d\mu$$

$\square$

למה. אם f מדידה, $E \in \Sigma$, $\mu(E) = 0$ אזי f אינטגרבילית על E ו־ $\int_E f d\mu = 0$.

זה נכון לכל האינטגרלים שהגדרנו עד עכשיו.
ראינו שאם פונקציה אינטגרבילית אז גם הערך המוחלט הוא אינטגרבילי. ההפכך לא היה נכון לאינטגרל רימן:

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ -1, & \text{אחרת} \end{cases}$$

לא אינטגרבילית רימן ־ קבוצת נקודות אי הרציפות שלה היא כל הקטע. אבל הערך המוחלט שלה אינטגרבילי לפי רימן.
באינטגרל החדש שלנו הרווחנו – אכן אם הערך המוחלט אינטגרבילי, כך גם הפונקציה עצמה.

למה. תהי f מדידה. אם $|f|$ אינטגרבילית אזי גם f אינטגרבילית.

הוכחה.

$$|f| = f^+ + f^- \geq \begin{cases} f^+ \\ f^- \end{cases}$$

נסיק כי f^+, f^- אינטגרביליות. $\square$

למה. נניח f אינטגרבילית ו– g מדידה המקיימת $|g| \leq f$ כב"מ אז גם g אינטגרבילית.

הוכחה. אם היה אי־שוויון בכל מקום (ולא כמעט בכל מקום) היינו מקבלים $|g|$ אינטגרבילי והכל טוב ויפה. נצטרך קצת להתחכם. נגדיר

$$E := \{x \in X : |g(x)| > f(x)\}$$

$$\mu(E) = 0$$

$$\hat{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \notin E \\ |g(x)|, & x \in E \end{cases}$$

$\hat{f}$ מדידה, אינטגרבילית ($\hat{f}^+ = f^+$ כב"מ, וכן $\hat{f}^- = f^-$ כב"מ).
$|g| \leq \hat{f}$ ולכן g אינטגרבילית. $\square$

משפט. רציפות בהחלט של אינטגרל
תהי f אינטגרבילית. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ בעל התכונה: אם $E \in \Sigma$ $\mu(E) < \delta$ אזי

$$\left|\int_E f d\mu\right| < \varepsilon$$

הוכחה. קיים δ כזה עבור $|f|$

$$\left|\int_E f d\mu\right| \leq \int_E |f| d\mu < \varepsilon$$

$\square$

נראה משפט התכנסות מאוד מוצלח.

משפט. משפט ההתכנסות הנשלטת, ההתכנסות של לבג
תהי $\{f_n\}$ סדרה של פונקציות אינטגרביליות המתכנסות כב"מ ל– f מדידה. נניח כי קיימת פונקציה אינטגרבילית g המקיימת $|f_n| \leq g$ (לכל n).
אזי f פונקצית הגבול אינטגרבילית ו–

$$\int f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_k d\mu$$

הערה. אם המידה שלמה לא צריך או אם ההתכנסות היא בכל נקודה (או עבור המשלים).

הוכחה. f מדידה. $|f| \geq g$ ואז f אינטגרבילית.
נתבונן בסדרה $g - f_n \geq 0$ כב"מ מתקיים:

$$g - f_n \to g - f$$

לכן,

$$\int g d\mu - \int f d\mu = \int (g-f) d\mu \leq \liminf \int (g-f_n) d\mu = \int g d\mu - \limsup \int f_n d\mu$$

נתבונן בסדרה $g + f_n \geq 0$. כב"מ מתקיים:

$$g + f_n \to g + f$$

$$\int g d\mu + \int f d\mu = \int (g+f) d\mu \leq \liminf \int (g+f_n) d\mu = \int g d\mu + \liminf \int f_n d\mu$$

מאי שוויון הראשון נסיק ש-

$$\int f d\mu \geq \limsup \int f_n d\mu$$

מהשני ש-

$$\int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$$

□

הלמה של פטו ומשפט ההתכנסות הנשלטת תקפים אם מחליפים את ההתכנסות כב"מ בהתכנסות במידה. נוכיח זאת.

למה. ***Faton*** $\{f_n\}$ פונקציות מדידות $0 \geq$ מתכנסות במידה ל- f.

הוכחה. $\{\int f_n d\mu\}$ יש לסדרה גבול תחתון לכן קיימת תת־סדרה $\{\int f_{n_k} d\mu\}$ המתכנסת ל- $\liminf_n \int f_n d\mu$.
ל- $\{f_{n_k}\}$ יש תת־סדרה $\{f_{nk_p}\}$ שמתכנסת כמעט בכל מקום ל- f.
עבור הסדרה הזאת נשתמש בלמה של פטו כמו שאנחנו מכירים:

$$\int f d\mu \leq \liminf_p \int f_{n_{k_p}} d\mu = \lim_{k \to \infty} \int f_{n_{k_p}} d\mu = \liminf \int f_n d\mu$$

□

באופן דומה נוכיח את הגרסה של משפט ההתכנסות הנשלטת:

משפט. $\{f_n\}$ סדרה של פונקציות אינטגרבילית המתכנסת במידה ל- f. נניח כי קיימת g אינטגרבילית המקיימת $|f_n| \geq g$ לכל n.

הוכחה. ל-f_n יש תת־סדרה $\{f_{n_k}\}$ שמתכנסת כב"מ ל - f. כאן אנחנו במצב משפט ההתכנסות הנשלטת הרגיל: $\{f_{n_k}\}, f, g$ מקיימות תנאי משפט ההתכנסות הנשלטת ולכן f אינטגרבילית.

טענה. נניח $\{a_n\}$ והמספר a מקיימים התכונה הבאה: לכל תת־סדרה של $\{a_n\}$ יש תת־סדרה המתכנסת ל- a. אזי $a_n \to a$.

הוכחה. תרגיל.

לכל תת־סדרה $\{f_{n_p}\}$ יש תת־סדרה $\{f_{n_{p_k}}\}$ המתכנסת כב"מ ל- f. עכשיו עבור תת־הסדרה הזאת נשתמש במשפט ההתכנסות הנשלטת

$$\int f_{n_{p_k}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int f d\mu$$

עפ"י משפט ההתכנסות הנשלטת.
לכן לכל תת־סדרה $\{\int f_{n_p} d\mu\}$ של $\{\int f_n d\mu\}$ יש תת־סדרה $\{\int f_{n_{p_k}} d\mu\}$ המתכנסת ל- $\int f d\mu$. לכן הסדרה כולה מתכנסת לאינטגרל. $\square$

משפט. נניח כי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית לבג. יהי $t \in \mathbb{R}$ אזי $x \to f(x+t)$ אינטגרבילית לבג ו-

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\mu$$

הוכחה. E מדידה.

$$\chi_E(x+t) = \chi_{E-t}(x)$$

$E-t$ מדידה, $m(E) = m(E-t)$ ולכן

$$\int \chi_E(x+t) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{E-t}(x) dx = m(E-t) = m(E) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_E(x) dx$$

כלומר אם במקום f לוקחים פונקציה אופיינית של קבוצה הנוסחה נכונה. לכן היא נכונה לכל פונקציה פשוטה. ולכן נכונה לכל פונקציה חסומה המתאפסת מחוץ לקבוצה ממידה סופית ולכן נכונה לכל פונקציה מדידה אי־שלילית ולכן נכונה לכל פונקציה אינטגרבילית. $\square$