פונקציות ממשיות - הרצאה 10

16.11.10

בשעיור הקודם דיברנו על אינטגל של פונקציה מדידה אי־שלילית.
הגדרנו:

$$\int_x f d\mu := \sup\{h \leq f; \text{מדידה, חסומה ומתאפסת מחוץ לקבוצה ממידה סופית}\}$$

ייתכן כי הערך הזה אינסופי, אך אם הוא סופי, נאמר ש־ f אינטגרבילית. אם אנחנו על הישר עם מידת לבג, נאמר שהיא אינטגרבילית לבג.
ראינו מספר תכונות, בין השאר שאם $f \geq g$ כמעט בכל מקום $f \geq g$ כמעט בכל מקום אז $\int f d\mu \geq \int g d\mu$

$$\Leftarrow \text{f=g כב"מ} \Leftarrow \int f d\mu = \int g d\mu$$

שיעור שעבר הבטחנו משפטי גבול:

משפט. (הלמה של *Faton*) (X, Σ, μ) מרחב מידה. תהי $\{f_n\}$ סדרה של פונקציות מדידות, אי־שליליות המתכנסות כמעט בכל מקום לפונקציה אי שלילית מדידה. אזי:

$$\int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$$

הערות.

- התכנסות כמעט בכל מקום של פונקציות אי־שליליות מבטיחה פונקציה גבולית אי־שלילית כמעט בכל מקום. היות והגדרנו אינטגרל לפונקציות אי־שליליות, היינו צריכים דרישה של אי־שליליות.
- מדידות f נובעת מהתכנסות כב"מ רק עבור מידה שלמה. לכן דרשנו ש־ f מדידה.
- לא חייב להיות גבול לאינטגרלים ולא חייב להתקיים שוויון. נראה זאת מיד אחרי ההוכחה.
- פאטו עצמו השתמש בניסוח לעיל כלמת עזר באחד המאמרים. בפועל המשפט נותן חסם מעולה מלעיל ונשתמש בו במשפטי גבול אחרים.

הוכחה. תהי $X' \in \Sigma$ המקיימת $\mu(X \setminus X') = 0$ ולכל $x \in X'$ $\{f_n(x)\} \to f(x)$ (התכנסות כמעט בכל מקום).
מהגדרת X':

$$\int_{X'} f_n d\mu = \int_X f_n d\mu$$

$$\int_{X'} f d\mu = \int_X f d\mu$$

לכן, אם נוכיח על X' (עליו יש לנו התכנסות) במקום על X לא יקרא שום דבר נורא.
תהי h מדידה, חסומה, מתאפסת מחוץ לקבוצה בעלת מידה סופית ומקיימת $h \leq f$ על X'.
במילים אחרות, פונקציה טיפוסית המופיעה בהגדרת האינטגרל.
נגדיר:
$h_n := f_n \wedge h$ מדידה, מתאפסת בכל נקודה בה h מתאפסת (כי $f_n \geq 0$) חסומה (בדיוק כמו h). וכל זה לכל n שנבחר.
כעת,

$$\int_{X'} h_n d\mu \leq \int_{X'} f_n d\mu$$

כמו כן,

$$h_n \to h(x)$$

מדוע? כי המינימום הוא פונקציה רציפה. לכן, לכל $x \in X'$

$$f_n(x) \wedge h(x) \to f(x) \wedge h(x) = h(x)$$

כעת נשתמש במשפט ההתכנסות החסומה:

$$\int_{X'} h d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{X'} h_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{X'} f_n d\mu$$

כלומר,

$$\int_{X'} h d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{X'} f_n d\mu$$

וזה נכון לכל h המשתתף בהגדרת האינטגרל. לכן אי־השוויון נכון גם לסופרמום. אז,

$$\int_{X'} f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{X'} f_n d\mu$$

כעת, היות ו–

$$\int_X f d\mu = \int_{X'} f d\mu$$

וכן

$$\liminf_{n\to\infty}\int\limits_{X'} f_n d\mu = \liminf_{n\to\infty}\int\limits_{X} f_n d\mu$$

המשפט נובע. $\square$

אמרנו שיכול להיות אי־שוויון חריף. ואכן, עבור $(\mathbb{R},\mathcal{L},m)$ סדרת הפונקציות $\{\chi_{[n,n+1]}\}$ מתכנסת בכל נקודה של הישר ל־0.

$$\int\limits_{\mathbb{R}} 0 dm = 0$$

מצד שני,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{[n,n+1]} dm = 1$$

בפרט

$$\liminf \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{[n,n+1]} dm = 1$$

לכן אין שוויון ויש אי־שוויון חריף.
מדוע $\liminf$?
נגדיר:

$$f_n = \begin{cases} \chi_{[n,n+1]}, & \text{אי־זוגי } n \\ 2\chi_{[n,n+1]}, & \text{זוגי } n \end{cases}$$

משפט. (ההתכנסות המונוטונית)
תהי $\{f_n\}$ סדרה לא יורדת של פונקציות מדידות אי־שליליות השואפות ל – f. מתקיים:

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu$$

הערות.

- אולי הערך הוא אינסופי.
- f היא מדידה כגבול המדידות.
- f אי־שלילית כגבול של אי־שליליות.

הוכחה. ל־ $\{\int f_n d\mu\}$ יש גבול כי הסדרה לא יורדת.
לכל n $f \ge f_n$ $\Leftarrow$ לכל n $\int f d\mu \ge \int f_n d\mu$.

$$\int f d\mu \ge \lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu = \liminf_{n\to\infty}\int f_n d\mu$$

כעת מהלמה של פאטו,

$$\liminf_{n\to\infty}\int f_n d\mu \ge \int f d\mu$$

$\square$

תוצאה. תהי $\{u_n\}$ סדרה של פונקציות מדידות אי־שליליות ותהי $f := \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ אזי,

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n d\mu$$

כמובן,

$$\sum_{n=1}^{k} u_n \uparrow_{k\to\infty} f$$

סדרת הסכומים היא כמובן לא יורדת. נשתמש במשפט ההתכנסות המונוטונית:

$$\int f d\mu = \lim_{k\to\infty} \int \left(\sum_{n=1}^{k} u_n \right) d\mu = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int u_n d\mu = \sum_{n} \int u_n d\mu$$

משפט. נניח כי $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ כאשר לכל n $E_n \in \Sigma$ ו־ $\{E_n\}$ זרות שתיים־שתיים. אם f מדידה ואי־שלילית אזי,

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} f d\mu$$

תכונה זו נקראת סיגמא־אדיטיביות.

הוכחה. נשתמש בתוצאה שראינו:

$$\int\limits_{x} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{X} f \chi_{E_n} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} f d\mu$$

$\square$

משפט. (רציפות בהחלט)
תהה f אינטגרבילית אי־שלילית לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta(\varepsilon) > 0$ המקיים: אם $E \in \Sigma$ $\mu(E) < \delta$ אזי

$$0 \geq \int_E f d\mu < \varepsilon$$

הוכחה. נגדיר $f_n(x) := f(x) \wedge n$ $n = 1, 2, 3, \dots$
f_n מדידה, $0 \leq f_n \leq n$ $f \geq f_n$.

$$f_n(x) \uparrow f(x)$$

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$$

קיים N עבורו

$$0 \leq \int\limits_X f d\mu - \int\limits_X f_N d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$0 \leq \int\limits_X (f - f_N) d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

נבחר $\delta := \frac{\varepsilon}{2N}$.
כעת, אם $E \in \Sigma$ $\mu(E) < \delta = \frac{\varepsilon}{2N}$ אזי,

$$\int\limits_E f d\mu = \int\limits_E (f - f_N) d\mu + \int\limits_E f_N d\mu \leq$$
$$\leq \int\limits_X (f - f_n) d\mu + \int\limits_E f_N d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2} + \int\limits_E N d\mu = \frac{\varepsilon}{2} + N \cdot \mu(E) = \varepsilon$$

□