פונקציות ממשיות - הרצאה 1

17.10.10

אינטגרל הגבול וגבול האינטגרל

מחדו"אות למניהן אנו מכירים רק משפט אחד שמדבר על גבולות של אינטגרלים:
אם $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות אינטגרביליות לפי רימן על הקטע $[a,b]$ שמתכנסת במידה שווה על הקטע $[a,b]$ לפונקציה f, אזי f גם כן אינטגרבילית רימן על $[a,b]$ וכן מתקיים

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

אולם, הדרישה של התכנסות במידה שווה היא מאוד קשה. כמו כן, ישנן דוגמאות בהן השוויון הנ"ל נכון למרות שהתנאי של התכנסות במידה שווה אינו מתקיים.

דוגמאות. 1. $f_n(x) = 2n^2xe^{-n^2x^2}$ עבור $0\le x\le 1, n=1,2,3,\dots$

קל לבדוק שלכל x

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

ולכן, $\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0$. מצד שני, שלמעשה $f_n(x)$ היא הנגזרת של הפונקציה $-e^{-n^2x^2}$. לכן,

$$\int_0^1 f_n(x)dx = -e^{-n^2x^2}\mid_0^1 = 1-e^{-n^2}\xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

כלומר,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = 1$$

קיבלנו סדרת פונקציות שמתכנסות נקודתית לפונקציה, הפונקציה הגבולית היא אפילו אינטגרבילית רימן אבל אינטגרל הגבולות שונה מגבול האינטגרלים.

(כמובן שמקרים כאלה לא נצליח לשפר אפילו אם נרחיב את מושג האינגרל).

.2

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^3x, & 0\le x\le \frac{1}{2n^2} \\ -2n^3+2n, & \frac{1}{2n^2}\le x\le \frac{1}{n^2}\end{cases}$$

עבור $n = 1, 2, 3, \ldots$ ועבור $x \in [a, b]$
הפונקציות רציפות, לכן אינטגרביליות לפי רימן. נחשב את גבול האינטגרל:

$$\int_a^b f_n(x) = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

כמו כן, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, לכל x בקטע (כי סדרת אפסים החל ממקום מסויים).
בפרט, הפונקציה הגבולית אינטגרבילית ומתקיים $\int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0$ (כי אינטגרל של פונקציית האפס).
כלומר, קיבלנו את השוויון

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

הפונקציה לא מתכנסת במידה שווה לפונקציה הגבולית, לכן לא היינו יכולים להסיק את זה מהמשפט. עם זאת, כן היינו רוצים משפט שינחה אותנו במקרים דומים.

3. פונקצית דיריכלה:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{רציונלי x} \\ 1, & \text{אינו רציונלי x} \end{cases}$$

על הקטע $[0, 1]$. אינה אינטגרבילית רימן (נשים לב, כי לכל חלוקה סכום דרבו התחתון הוא 0 ולעומתו סכום דרבו העליון הוא 1).
המספרים הרציונלים הם קבוצה בת מניה. תהי $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת כל הרציונליים בקטע $[0, 1]$. נגדיר סדרת פונקציות באופן הבא: לכל $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$f_k(x) := \begin{cases} 1, & x = r_1, r_2, \ldots, r_k \\ 0, & \end{cases}$$

כל $f_k(x)$ שונה מפונקציית האפס במספר סופי של נקודות, בפרט אינטגרבילית והאינטגל שווה ל־0. מצד שני, לכל $0 \le x \le 1$ מתקיים:

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$$

קיבלנו סדרה של פונקציות אינטגרביליות שמתכנסות (נקודתית) לפונקציה שבכלל לא אינטגרבילית רימן. מצד שני, האינטגרלים של פונקציות הסדרה מתכנסים $\lim\limits_{k\to\infty} \int f_k dx = 0(x)$. היינו רוצים להגדיר את אינטגרל הגבול בדיוק להיות הערך הזה.

הרעיון של לבג

באינטגרל רימן השתמשנו בחלוקה של תחום ההגדרה. ננסה לעשות אותו דבר אבל לתווך של הפונקציה [1] .
נניח $f(x)$ פונקציה מ- $[a,b]$ חסומה, המקבלת ערכים בין m ל-M. לכל קטע מחלוקת התווך (בין m ל- M) נסתכל על כל הנקודות בהן הפונקציה מקבלת ערכים מהקטע.

$$m=\alpha_0<\alpha_1<\ldots<\alpha_n=M$$

נגדיר את הקבוצות הבאות:

$$E_1:=\{x\in[a,b]:\alpha_0\leq f(x)<\alpha_1\}$$

$$E_2:=\{x\in[a,b]:\alpha_1\leq f(x)<\alpha_2\}$$

$$\vdots$$

$$E_n:=\{x\in[a,b]:\alpha_{n-1}\leq f(x)<\alpha_n\}$$

בכל קטע מהחלוקה נבחר נקודה (לאו דווקא מהערכים שהפונקציה מקבלת): $\beta_1,\ldots,\beta_n$.
כעת נתבונן בסכומים הבאים:

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i\cdot l(E_i)$$

כאשר $l(E)$ הוא אורך הקטע E. זאת תהיה ההגדרה החדשה שלנו לאינטגרל. אם לרגע נראה לכם שמשהו לא בסדר כאן, אכן כך הדבר. המשיכו לקרוא.
אם פונקציה היא אינטגרבילית רימן אז גם הסכום הנ"ל יתכנס, לכן אכן רק הרחבנו את מושג האינטגרל של רימן. כמו כן, הסכום ייתכנס גם לפונקציות שלא אינטגרביליות לפי רימן. אך עדיין נותרו פונקציות שגם הסכום הזה לא ייתכנס.
הבעיה אליה שמתם לב בפסקה הקודמת היא שבאופן לא מבוסס ולא מוצדק השתמשנו ב– $l(E_i)$ למרות ש- E_i הוא לאו דווקא קטע או איחוד של קטעים.

אורך של קבוצה

סימונים

$\mathbb{R}$ –המספרים הממשיים.
$\tilde{\mathbb{R}}:=\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ הממשיים המורחבים, קבוצה סדורה.
עבור הקטע I נסמן ב- $l(I)$ את האורך של הקטע.

[1] למעשה זאת הגדרה שערכה העיקרי הוא היסטורי. בפועל נשתמש בהגדרות שקולות אבל נוחות יותר.

מידה חיצונית לפי לבג

עבור $A \subseteq \mathbb{R}$ נגדיר:

$$M = \left\{ \sum_{i=1} l(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1} I_n, \text{ קטעים פתוחים } I_n \right\}$$

$$m^*(A) := \inf M$$

מדוע בשום מקום אין גבולות עליונים? פשוט אנחנו מרשים גם כיסוי בן מניה וגם כיסוי סופי.

הערך $m^*(A)$ מוגדר היטב לכל $A \subseteq \mathbb{R}$ וכן

$$0 \leq m^*(a) \leq \infty$$

כאשר הערך ∞ מתקבל לדוגמא עבור $A = \mathbb{R}$.

קל לוודא כי $m^*(\phi) = 0$, פשוט ניקח כיסוי $[-\varepsilon, \varepsilon]$. באופן דומה נסיק כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $m^*(\{x\}) = 0$.

תכונה מיידית נוספת: עבור $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ מתקיים: $m^*(A) \leq m^*(B)$, שכן כל כיסוי של קטעים פתוחים של B הוא בפרט גם כיסוי של A.

משפט. אם I קטע אזי $m^*(I) = l(I)$

הוכחה. ראשית, נוכיח כי אם I קטע חסום כלשהו אז $m^*(I) \leq l(I)$

מדוע? נניח כי הקצוות של I הם a ו־ b, כאשר $a \leq b$. אז בוודאי $I \subseteq (a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ לכל $\varepsilon > 0$. לפיכך, המספר $l(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ נמצא בקבוצה M שהגדרנו למעלה. מתכונות אינפימום: $m^*(I) \leq l(a-\varepsilon, b+\varepsilon) = (b-a) + 2\varepsilon$. אגף שמאל אינו תלוי ב־$\varepsilon$ לכן, $m^*(I) \leq b-a = l(I)$.

נוכיח כעת את הכיוון השני $m^*(I) \geq l(I)$. תחילה עבור קטעים סגורים וחסומים.

נניח $I = [a,b]$. צ"ל $b-a \leq m^*(I)$. לשם כך, נראה שכל מספר בקבוצה M גדול מ־ $b-a$.

יהי $\{I_n\}$ כיסוי פתוח של I. צ"ל $(b-a) \leq \sum\limits_n l(I_n)$.

מלמת הינה־בורל קיים מספר m עבורו:

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} I_n$$

כאשר לכל $1 \leq n \leq m$ מתקיים $I_n = (a,b)$.

הנקודה a שייכת לאחד מהקטעים מהכיסוי. קיים $1 < n_1 < m$ עבורו $a_{n_1} < a < b_{n_1}$.

אם גם הנקודה b נמצאת בקטע הזה – סיימנו. אחרת, $b_{n_1} \leq b$. אחד הקטעים מהכיסוי מכסה את b_{n_1}. קיים $1 \leq n_2 \leq m$ עבורו $a_{n_2} < b_{n_1} < b_{n_2}$. באופן דומה, בודקים האם b שייך לקטע. אם כן סיימנו, אחרת ממשיכים.

נמשיך עד שנקבל מספר n_k, $1 \leq n_k \leq m$ עבורו $a_{n_k} < b < b_{n_k}$ (ניתן לעשות זאת כי הכיסוי סופי). נחשב:

$$\sum_{j=1}^{k} l(I_{n_j}) = \sum_{j=1}^{k} (b_{n_j} - a_{n_j}) = b_{n_k} - (a_{n_k} - b_{n_{k-1}}) - \ldots - (a_{n_2} - b_{n_1}) - a_{n_1}$$

מבחירת הנקודות a_{n_i} ו־ b_{n_i} המספרים בסוגריים שליליים. נקבל:

$$b_{n_k} - (a_{n_k} - b_{n_{k-1}}) - \ldots - (a_{n_2} - b_{n_1}) - a_{n_1} = b_{n_k} - a_{n_1} \geq b - a = l(I)$$

מצד שני $\sum\limits_n l(I_n) \geq \sum\limits_{j=1}^{k} l(I_{n_j})$

לכן הוכחנו את השוויון עבור קטעים סגורים וחסומים.

נניח I קטע חסום כלשהו בעל קצוות $a < b$. לכל ε, $I \subseteq \left[a + \frac{\varepsilon}{2}, b - \frac{\varepsilon}{2}\right]$.

האורך של הקטע הנ"ל הוא $b - a + \varepsilon = m^*\left[\left(a + \frac{\varepsilon}{2}, b - \frac{\varepsilon}{2}\right]\right) \leq m^*(I)$. אגף ימין אינו תלוי ב־$\varepsilon$ לכן

$$l(I) = b - a \leq m^*(I)$$

לכן לכל קטע חסום יש שוויון.

נניח הקטע I אינו חסום (קרן או כל הישר). יהי $\alpha > 0$ כלשהו. I אינו חסום לכן מכיל קטע סגור וחסום J שאורכו α.

$$m^*(I) \geq m^*(J) = l(J) = \alpha$$

מכאן, $m^*(I) = \infty = l(I)$ כי גדול מכל מספר חיובי.

□

משפט. תהי $\{A_n\}$ סדרה של תתי־קבוצות של $\mathbb{R}$. אזי:

$$m^*(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n m^*(A_n)$$

הערה. תכונה זו ידועה תחת השם – תת־סיגמא אדיטיביות.

הוכחה. אם $m^*(A_n) = \infty$ עבור n מסויים אז סיימנו. נניח עתה כי $m^*(A_n) < \infty$ לכל n.
יהי $\varepsilon > 0$ כלשהו.

$$m^*(A_n) = \inf\left\{\sum_k (I_k^n) : \text{כיסוי פתוח של הקבוצה } A_n \ \{I_k^n\}\right\}$$

מתכונות אינפימום קיים כיסוי פתוח $\{I_k^n\}$ של A_n המקיים:

$$\sum l(I_k^n) \leq m^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

נסתכל על $\{I_k^n\}_{n=1,k=1}$ זהו כיסוי פתוח בן מניה של $\bigcup A_n$ לכן,

$$m^*(\bigcup A_n) \leq \sum_{k=1,n=1} l(I_k^n) = \sum_{n=1}\sum_{k=1} l(I_k^n) \leq \sum_{n=1}\left(m^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \leq \sum_{n=1} m^*(A_n) + \varepsilon$$

ולכן אי־השוויון נובע.

□

נרצה להרחיב את מושג המידה החיצונית של לבג. נתחיל מהכללה:

הגדרה. נניח X קבוצה כלשהי. $P(x)$ קבוצת כל תתי הקבוצות של X.

$$\mu^* : P(x) \to [0, \infty]$$

נקראת מידה חיצונית (של X) אם יש לה התכונות הבאות:

1. $\mu^*(\phi) = 0$.
2. אם $A \subseteq B \subseteq X$ אזי $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
3. עבור סדרה $\{A_n\}$ של תתי קבוצות של X מתקיים:

$$\mu^*(\bigcup A_n) \leq \sum \mu^*(A_n)$$

דוגמאות.

1. m^* על $\mathbb{R}$.
2. X קבוצה כלשהי. $A \subseteq X$

$$\mu^*(A) := \begin{cases} \infty, & A\text{אינסופית} \\ n, & card(A) = n < \infty \end{cases}$$

זאת נקראת מידת הספירה.

3. $X \neq \phi$ כלשהי $x_0 \in X$ ו- $A \subseteq X$:

$$\mu^*(A) := \begin{cases} 1, & x_0 \in X \\ 0, & x_0 \notin X \end{cases}$$

4. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ לא יורדת, רציפה מימין בכל נקודה. $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\mu_\varphi^* := \inf \left\{ \sum_n \big(\varphi(b_n) - \varphi(a_n)\big) : A \subseteq \bigcup_n (a_n, b_n) \right\}$$

למה. אם $A \subseteq \mathbb{R}$ בת מניה, אזי $m^*(A) = 0$

הוכחה.

$$A = \bigcup_{n=1} \{x_n\}$$

$$m^*(A) \leq \sum_n m^*\left(\{x_n\}\right) = 0$$

$\square$

למה. יהיו $A \subseteq \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ כלשהו. קיימת תת קבוצה פתוחה O של $\mathbb{R}$ המקיימת $A \subseteq O$ ו– $m^*(O) \leq m^*(A) + \varepsilon$

הוכחה. אם $m^*(A) = \infty$ ניקח $O = \mathbb{R}$.
נניח $m^*(A) \leq \infty$. קיימים קטעים פתוחים $\{I_n\}$ שמכסים את A המקיימים:

$$m^*(\bigcup I_n) \leq \sum m^*(I_n) = \sum_n l(I_n) < m^*(A) + \varepsilon$$

נבחר $O = \bigcup I_n$

□