

הסתברות למתמטיקאים – תרגול 9

4.5.11

הילוך מקרי

תרגיל. S_{2n} הילוך מקרי עם $2n$ צעדים. רוצים לתת הערכה לסיכוי שבכל שלב נהיה מעל 0 ובשלב ה- $2n$ נגיע ל-0. הראו כי עבור הילוך מקרי פשוט מתקיים:

$$1. \quad \mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 0) \leq \frac{1}{2n}$$

$$2. \quad \mathbb{P}(S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \dots, S_{2n-1} \geq 0, S_{2n} = 0) \geq \frac{1}{2n}$$

פתרון. על המסלולים שמתחילים ב-0 וב- $2n$ מגיעים ל-0 יש מידת הסתברות יוניפורמית. נסמן את המרחב ב- Ω . סיכוי $\frac{1}{\binom{2n}{n}}$ לכל מסלול. נתבונן במסלול מסויים. נחשוב עליו בטור מעגל, כלומר אחרי $2n$ נתנהג בדיוק כמו כאילו שהתחלנו שוב ב-0. כמו כן, נגדיר פרמוטציה של מסלול – פשוט להתחיל ממקום אחר במסלול ולהמשיך $2n$ צעדים. עבור מסלול נתון S , יש לכל היותר פרמוטציה אחת (מסלול מתאים) במקרה ויש מינימום יחיד למסלול S שהיא הילוך מתאים לסעיף הראשון. כמו כן, כל פרמוטציה שמתחילה ממינימום מתאימה למסלול כפי שנדרש בעסיף שתיים. נגדיר מרחב ההסתברות Ω' על פרמוטציות $(1, 2, 3, \dots, 2n)$. שוב ההסתברות יוניפורמית. יש סיכוי $\frac{1}{2n}$ לכל פרמוטציה. כעת לכל f :

$$\int_{\Omega} f(s) d\mathbb{P} = \int_{\Omega} f(\underbrace{\sigma \circ S}_{\text{פרמוטציה של } 1, \dots, 2n}) d\mathbb{P}$$

עבור סעיף ראשון המאורע שלנו הוא:

$$A = \{S_0 = 0, S_1 > 0, \dots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 0\}$$

ומתקיים $\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A)$ כלומר

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \int_{\Omega} \mathbb{1}_A(s) d\mathbb{P}(S) = \int_{\Omega} \mathbb{1}_A(\sigma \circ S) d\mathbb{P}(S) = \\ &= \int_{\Omega'} d\mathbb{P}'(\sigma) \underbrace{\int_{\Omega} \mathbb{1}_A(\sigma \circ S) d\mathbb{P}(S)}_{\text{לא תלוי ב-}\sigma} = \int_{\Omega} d\mathbb{P}(S) \cdot \underbrace{\mathbb{E}_{\sigma}(\mathbb{1}_A(\sigma \circ S))}_{\leq \frac{1}{2n}} \leq \frac{1}{2n}\end{aligned}$$

לסעיף השני, באותו אופן נגיע ל- $\int_{\Omega} d\mathbb{P}(S) \cdot \mathbb{E}_{\sigma}(\mathbb{1}_B(\sigma \circ S))$ כאשר $B = (S_1 \geq 0, \dots, S_{2n-1} \geq 0, S_{2n} = 0)$ ועפ"י טיעון דומה הפתרון $\mathbb{E}(\mathbb{1}_B(\sigma \circ S)) \geq \frac{1}{2n}$ (כי יש לכל S לפחות פרמוטציה אחרת שנותנת מסלול ב- B).

משפט. Polya

הילוך מקרי פשוט ממימד d חוזר לראשית כ"ב אינסוף פעמים עבור $1 \leq d \leq 2$ וחוזר רק מספר סופי של פעמים כ"ב עבור $d \geq 3$.

"למרות זאת":

תרגיל. הילוך מקרי פשוט ממימד אחד, $T = \min\{n \geq 1 : S_n = 0\}$ אז $\mathbb{E}(T) = +\infty$.

Gambler's ruin

יש משחק. נניח שמהמר מתחיל עם x שקלים בכיס. בכל זמן קצוב מרוויח שקל נוסף בהסתברות $\frac{1}{2}$ ומפסיד שקל בהסתברות $\frac{1}{2}$. מה הסיכוי שהכסף יצטבר אצלו ל- A דולרים לפני שהוא יתרושש? כלומר אם $S_0 = x$, $T = \min\{n \geq 0 : S_n = 0 \text{ או } S_n = A\}$, אז $\mathbb{P}^x(S_T = A) = ?$ כאשר x מייצג את העובדה ש- $S_0 = x$.

הערה. מה הסיכוי שלעולם לא נגיע לא ל-0 ולא ל- A ? בהכרח $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ וזה נובע מתרגיל שעשינו.

נסמן, $f(x) = \mathbb{P}^x(S_T = A)$. נשים לב שמתקיים:

1. אם $x = A$ אז $f(A) = 1$.

2. אם $x = 0$ אז $f(0) = 0$.

3. אם $0 < x < A$ אז:

$$f(x) = \frac{1}{2}f(x+1) + \frac{1}{2}f(x-1)$$

רוצים לפתור את המשוואה הזאת. מתקיים:

$$\frac{1}{2}(f(x) - f(x-1)) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x))$$

כלומר,

$$f(x) - f(x-1) = f(x+1) - f(x)$$

הפונקציה היחידה שמקיימת הפרשים זההים היא לינארית: $f(x) = ax + b$. מההבחנות מקבלים $f(x) = \frac{x}{A}$.

עוד שאלה היא כמה זמן יקח המשחק. כלומר $g(x) = \mathbb{E}^x T = ?$ שוב מתקיים:

$$1. \quad g(A) = g(0) = 0.$$

2. נכתוב נוסחאת הפרשים:

$$g(x) = 1 + \frac{1}{2}g(x+1) + \frac{1}{2}g(x-1)$$

נגדיר: $d(x) = g(x) - g(x-1)$. מהנוסחא שלנו:

$$2g(x) = 2 + g(x+1) + g(x-1)$$

ולכן,

$$d(x+1) = d(x) - 2$$

לכן,

$$\begin{pmatrix} d(x+1) \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d(x) \\ -2 \end{pmatrix}$$

מתקיים:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן,

$$\begin{pmatrix} d(x+1) \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d(1) \\ -2 \end{pmatrix}$$

בפרט,

$$d(x+1) = d(1) - 2x$$

או

$$(*) \quad d(x) = d(1) - 2(x-1)$$

עפ"י הגדרת d מתקיים:

$$d(1) = g(1) - g(0) = g(1)$$

כמו כן,

$$\sum_{k=1}^x d(k) = \sum_{k=1}^x g(k) - g(k-1) = g(x) - g(0) = g(x)$$

לכן,

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{k=1}^x d(k) = \sum_{k=1}^x (d(1) - 2(k-1)) = xd(1) - 2 \sum_{k=1}^x (k-1) = \\ &= xd(1) - 2 \sum_{k=1}^{x-1} k = xd(1) - x(x-1) \end{aligned}$$

לכן,

$$g(x) = xg(1) - x(x-1)$$

נציב $g(A) = 0$ ונקבל

$$g(1) = A - 1$$

לכן,

$$g(x) = x(A - x)$$

מסקנה. נניח שהתחלנו ב- $x > 0$. מה הסיכוי שנחזור ל-0 בזמן סופי? מפה שקיבלנו
הסיכוי שנגיע ל-0 לפני שנגיע ל- n הוא $1 - \frac{x}{n}$ לכן $\{ \text{הגענו ל-0 בזמן סופי} \} = A_n$
 $\{ \text{הגענו ל-0 לפני שהגענו ל-}n \}$
לכן,

$$\mathbb{P}(A) \geq \mathbb{P}(A_n) = 1 - \frac{x}{n} \rightarrow 1$$

זה נכון לכל n לכן $\mathbb{P}(A) = 1$.