

הסתברות למתמטיקאים – תרגול 8

27.4.11

הילוך מקרי פשוט

$X_i \in \{-1, 1\}$ סימנים מקריים. $S_n = X_1 + \dots + X_n$. $M_n = \max\{S_0, S_1, \dots, S_n\}$.

טענה. עקרון השיקוף: עבור $0 < m \leq m$,

$$\mathbb{P}(S_n = s, M_n < m) = \mathbb{P}(S_n = s) - \mathbb{P}(S_n = 2m - s)$$

הוכחה. מספר המסלולים "בטובים" (כלומר אלה שלא עוברים את m) שווה לסך כל המסלולים שמגיעים ל- S פחות מספר כל המסלולים "הרעים" – אלה שעוברים דרך m . נטען שמספר המסלולים הרעים הוא $2m - s$. מדוע? מסלול "רע" מגיע באיזשהו שלב ל- m . החל מנקודה מסוימת כבר לא נחתוך את m יותר אלא נמשיך ל- s . נמצא את הפעם האחרונה שביקרנו ב- m ונשקף את המסלול החל מנקודה זו. קיבלנו מסלול שהנקודה הסופית שלו בדיוק ב- $2m - s$ היות ועלינו עד m ומשם שיקפנו מסלול באורך $m - s$. קיבלנו ממסלול רע מסלול חדש ל- $2m - s$ וההתאמה חח"ע. לכן מספר המסלולים הוא בדיוק כמו מספר המסלולים הרעים ל- $2m - s$. $\square$

מסקנות.

$$\mathbb{P}(S_n = s, M_n = m) = \mathbb{P}(S_n = 2m - s) + \mathbb{P}(S_n = 2m - s + 2) \quad 1.$$

$$\mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{a+b} > 0 | S_{a+b} = a - b) = \frac{a-b}{a+b} : \text{Ballot Theorem} \quad 2.$$

דרך נוספת להתבונן בעקרון השיקוף (הוכחה של Ballot Theorem): מועמד A מקבל a קולות בבחירות. מועמד B מקבל $a > b$ קולות בבחירות. חושבים על המישור: כל קול של מועמד A – נזוז יחידה ימינה, כל קול של מועמד B נזוז יחידה למעלה נסיים בנקודה (a, b) . מה הסיכוי שבכל שלב יהיה שיוויון או מועמד A יוביל? מה זה אומר במישור? שעבור הישר $y = x$ אנחנו נמצאים מתחתיו (ואולי נוגעים בו). מספר המסלולים הטובים זה מספר כל המסלולים $\binom{a+b}{b}$ פחות מספר המסלולים הרעים (כלומר שבהם הגענו לישר $y = x + 1$). את מספר המסלולים הרעים נחשב עם שיקוף: נסמן את הפעם הראשונה שחצינו את $y = x + 1$ ונעשה שיקוף סביב $y = x + 1$ עד הנקודה הזאת. קיבלנו מסלול מ- $(-1, 1)$ ל- (a, b) . ושוב זאת התאמה חח"ע. לכן מספר המסלולים הרעים שווה למספר המסלולים מ- $(-1, 1)$ עד (a, b) וזה $\binom{a+b}{b-1} = \frac{b}{a+1} \binom{a+b}{b}$. לכן מספר המסלולים הטובים הוא $\binom{a+b}{b} \left(1 - \frac{b}{a+1}\right) = \binom{a+b}{b} \frac{a+1-b}{a+1}$. המספר הזה חלקי סך המסלולים $\binom{a+b}{b}$ ויוצא $\frac{a+1-b}{a+1}$. עכשיו אפשר להוכיח את Ballot: חייבים לזוז ימינה בצעד הראשון. הסיכוי לזה הוא $\frac{a}{a+b}$. אח"כ יש עוד $a + b - 1$ צעדים שבהם B לא עובר את A . לפי הטענה שהוכחנו זה שווה $\frac{a-b}{a+b}$ נותר רק להכפיל בהסתברות של הצעד הראשון (כי לא תלוי בשאר הצעדים) ומקבלים $\frac{a-b}{a+b}$.

תרגיל. הוכיחו כי:

$$\mathbb{P}(S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \dots, S_n \geq 0) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_{n-1} = 0) + \mathbb{P}(S_{n-1} = 1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_{n-1} = 2)$$

הוכחה.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_1 \geq 0, \dots, S_n \geq 0) &= \mathbb{P}(S_1 \leq 0, S_2 \leq 0, \dots, S_n \leq 0) = \\ &= \mathbb{P}(S_1 = 1, S_2 - S_1 \leq 1, \dots, S_n - S_1 \leq 1) = \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_1 \leq 1, \dots, S_{n-1} \leq 1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(M_{n-1} < 2) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=+1}^{-\infty} \mathbb{P}(M_{n-1} < 2, \dots, S_{n-1} = k) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=+1}^{-\infty} (\mathbb{P}(S_{n-1} = k) - \mathbb{P}(S_{n-1} = 2M_n - k)) = \end{aligned}$$

אחרי צמצום נשארים רק 4 איברים שתורמים לסכום:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(\mathbb{P}(S_{n-1} = 1) + \mathbb{P}(S_{n-1} = 0) + \mathbb{P}(S_{n-1} = -1) + \mathbb{P}(S_{n-1} = -2)) = \\ &= \frac{1}{2}(\mathbb{P}(S_{n-1} = 1) + \mathbb{P}(S_{n-1} = 0) + \mathbb{P}(S_{n-1} = 1) + \mathbb{P}(S_{n-1} = 2)) = \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_{n-1} = 0) + \mathbb{P}(S_{n-1} = 1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_{n-1} = 2) \end{aligned}$$

□