

הסתברות למתמטיקאים – תרגול 7

13.4.11

טענה. $\{x_i\}$ ב"ת כך ש- $\sum \frac{\text{Var } x_i}{i^2} < \infty$ אז $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \xrightarrow{a.s.} \mathbb{E}x_1$.
 הוכחה. נתון $\sum \text{Var}(\frac{x_i}{i}) < \infty$ לכן $\sum \text{Var}(\frac{x_i - \mathbb{E}x_i}{i}) < \infty$ לכן ממשפט קולמוגורוב
 $\sum \frac{x_i - \mathbb{E}x_i}{i} \xrightarrow{a.s.} 0$ ועכשיו מהלמה של קרוניקר $\frac{x_1 + \dots + x_n - n\mathbb{E}x_1}{n} \xrightarrow{a.s.} 0$.
 $\square$

משפט. שלשת הטורים של קולמוגורוב:
 נניח $x_1, x_2, \dots$ ב"ת. יהי $c > 0$. נגדיר $y_i = \mathbb{1}_{|x_i| < c} x_i$ אז $\sum x_i$ מתכנס כ"ב אם:

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(|x_n| > c) < \infty$$

$$2. \sum \mathbb{E}y_n \text{ מתכנס.}$$

$$3. \sum \text{Var } y_n < \infty$$

הערה. למעשה זה אם ורק אם אבל הכיוון השני נובע מדברים מתקדמים מדי.

הוכחה. נגדיר $\mu_n = \mathbb{E}y_n$ אז מ-3 $\sum \text{Var}(y_n - \mu_n) < \infty$ לכן ממשפט קולמוגורוב $\sum (y_n - \mu_n)$ מתכנס כ"ב. מ-2 $\sum \mu_n$ מתכנס ולכן $\sum y_n$ מתכנס כ"ב. ע"י שימוש ב-1 ומהלמה של בורל קנטלי נובע כי $\mathbb{P}(|x_n| > ci.o) = 0$. כלומר ההסתברות $\mathbb{P}(x_n \neq y_n i.o) = 0$ כלומר $\sum x_n$ מתכנס כ"ב.
 $\square$

משפט. חוק 1-0 של קולמוגורוב
 $x_1, \dots$ פ"פ $F_n^\infty = \sigma(x_n, x_{n+1}, \dots)$ שדה- σ המיוניפלי כך ש- $x_n, \dots$ פזיזות. שדה- σ זנכי: $F_n^\infty = \cap F_n^\infty$. כלומר מאורע A הוא פאורע זנכי אם הוא שייך ל- F_n^∞ לכל n . כלומר שינוי מספר סופי של ערכים אינו משנה את נשנות מאורע A .

דוגמא. $B_n \in \mathcal{B}$ קבוצות בורל אז $\{x_n \in B_n i.o\}$ היא מאורע זנכי. או קיים $\lim_{n \rightarrow \infty} x_1 + \dots + x_n$.

משפט. אם $\{x_n\}$ ב"ת אז לכל $A \in F_\infty^\infty$ מתקיים $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.

מסקנה.

1. $\{x_n\}$ ב"ת. נניח ש- y פ"פ כך ש- $y = f_n(x_n, \dots)$ לכל n אז $y = \text{const}$ כ"ב.

2. $\{x_n\}$ ב"ת אז המאורעות S_n מתכנס ו- S_n חסומים או S_n חסומים מלמעלה הם הסתברות 0 או 1.

דוגמא. עבור $\{x_n\}$ ב"ת ש"ה עם $\text{Var } x_i := \sigma^2 < \infty$ מ-1-0 אנחנו יודעים ש- $\frac{x_1}{1} + \dots + \frac{x_n}{n}$ מתכנס כש $n \rightarrow \infty$ בהסתברות 0 או 1. אבל ממשפט קולמוגורוב:

$$\sum \text{Var}(\frac{x_i}{i}) = \sum \frac{\sigma^2}{i^2} < \infty$$

ולכן בהסתברות 1.

תרגיל. יהיו $x_1, x_2, \dots$ מ"מ ב"ת, $y_1, \dots$ מ"מ ב"ת כך ש- $y_j \sim x_j$ לכל j . האם ייתכן ש-

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_1 + x_2 + \dots + x_n - y_1 - \dots - y_n = +\infty\right) > 0$$

פתרון. נסמן: $A := \{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} x_1 + x_2 + \dots + x_n - y_1 - \dots - y_n = +\infty\}$ ו-

$A := \{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} x_1 + x_2 + \dots + x_n - y_1 - \dots - y_n = -\infty\}$
היות ו- $x_j \sim y_j$ אז $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$ כי $x_1 + \dots + x_n - y_1 - \dots - y_n \sim y_1 + \dots + y_n - x_1 - \dots - x_n$

לכן $\mathbb{P}(A) \neq 1$. מצד שני A מאורע זנבי לכן $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ ולכן $\mathbb{P}(A) = 0$.

תרגיל. תהי $x_1, \dots$ סדרת מ"מ ב"ת ש"ה עם $\mathbb{E}x_1 = 0, \mathbb{E}x_1^2 = 1, S_n = x_1 + \dots + x_n$
 $y_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$

1. מצאו את $\mathbb{P}(\limsup_n y_n > t)$ לכל t .

2. בדקו האם $x_n \xrightarrow{\mathbb{P}} z$ עבור z כלשהו.

פתרון.

1. נראה כי $\mathbb{P}(\limsup y_n > t) = 1$. כלומר, $\limsup y_n \stackrel{a.s.}{=} +\infty$. יהי $m \in \mathbb{N}$. נגדיר
 $z_n^m = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=m}^n x_j$. ניתן להראות ש- $z_n^m \xrightarrow{a.s.} 0$ לכן, $\limsup z_n^m = \limsup y_n$.

$\limsup z_n^m$ אינו תלוי ב- $x_1, \dots, x_{m-1}$ ולכן לכל m :
 $\limsup y_n = f_m(x_m, x_{m+1}, \dots)$ מקולמגורוב $\limsup y_n \stackrel{a.s.}{=} c$ נניח בשלילה c סופי.

מצד אחד עפ"י CLT עבור n מספיק גדול $\mathbb{P}(y_n > c + 1) > \varepsilon > 0$ (*).

$$y \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{c+1}^{\infty} e^{-u^2/2} du$$

מצד שני נגדיר $A_n = \{y_n > c + 1\}$ אזי $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$. בהסתברות
1 קיים N כך שהחל ממנו $y_m < c + 1$ אבל נשים לב $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$.
לכן $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$. כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$: $\mathbb{P}(A_n) > 1 - \varepsilon$ אבל $\mathbb{P}(A_n) < \mathbb{P}(y_{n+1} < c + 1) \leq 1 - \varepsilon$ (*).

וזאת סתירה. לכן $\mathbb{P}(\limsup y_n > t) = 1$.

2. $y_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ אז מהתכנסות בהסתברות לפונקציה $z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon \forall \delta \exists N \forall n > N \mathbb{P}(|y_n - z| > \delta) < \varepsilon$$

ממשיות, אם $f_n \xrightarrow{\mathbb{P}} f$ אז קיימת תת סדרה $f_{n_k} \xrightarrow{a.s.} f$. אבל אפשר לחזור על
סעיף א' עם תת סדרה y_{n_k} ולקבל $\limsup x_{n_k} \stackrel{a.s.}{=} +\infty, \liminf y_{n_k} \stackrel{a.s.}{=} -\infty$ אז
 $y_{n_k} \xrightarrow{a.s.} z$ תהיה סתירה לכך שיש גבול כ"ב.