

הסתברות למתמטיקאים – תרגול 6

6.4.11

משפט. $X_n \rightarrow X$ הסתברות אס"ס לכל תת סדרה קיימת תת סדרה שמתכנסת ל- X כ"ב.
את הכיוון הראשון ראינו שיעור שעבר ואת הכיוון השני ראינו בממשיות.
תרגיל. יהיו $X_1, X_2, \dots$ ש"ה ב"ת ונניח ש-

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \text{ קיים וסופי}\right)$$

האם ייתכן $\mathbb{E}|X_1| = \infty$?

פתרון. לא. נניח בשלילה $\mathbb{E}|X_1| = \infty$. מתקיים:

$$\infty = \mathbb{E}|X_1| = \int_0^\infty \mathbb{P}(|X_1| > x) dx \leq \sum_{n=0}^\infty \mathbb{P}(|X_1| > n) = \sum_{n=0}^\infty \mathbb{P}(|X_n| > n)$$

מבורל קנלטי השני מקבלים ש- $\mathbb{P}(|X_n| > ni.o) = 1$ (כ"ב). כעת נשים לב לשוויון הבא:

$$(*) \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n+1}}{n+1} = \frac{S_n}{n(n+1)} - \frac{X_{n+1}}{n+1}$$

נגדיר $C = \{\omega : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \in (-\infty, \infty)\}$

$$A = C \cap \{\omega : |X_n| > ni.o\}$$

מתקיים:

ל- $\omega \in A$ עפ"י (*):

$$\left| \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n+1}}{n+1} \right| = \left| \frac{S_n}{n(n+1)} - \frac{X_{n+1}}{n+1} \right| \geq \left| \frac{S_n}{n(n+1)} \right| + \left| \frac{X_{n+1}}{n+1} \right|$$

$\omega \in C$ ולכן $\frac{S_n}{n(n+1)} \rightarrow 0$ וקטן מ- $\frac{1}{3}$ החל ממקום מסוים.

מצד שני $\frac{X_{n+1}}{n+1} \geq 1i.o$ ולכן

$$\left| \frac{S_n}{n(n+1)} \right| + \left| \frac{X_{n+1}}{n+1} \right| \geq \frac{2}{3}$$

אבל זו סתירה לכך ש- $\omega \in C$ ו- $\left| \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n+1}}{n+1} \right|$ קטן כרצוננו. לכן $A = \emptyset$ כלומר:

$$C \subseteq \{\omega : |X_n| > ni.o\}$$

$$\mathbb{P}(C) \leq \mathbb{P}(\{\omega : |X_n| > ni.o\}) = 0$$

מבורל קנלטי הצלחנו להוכיח את החוק החזק של המספרים הגדולים עם מומנט רביעי:
אם $X_1, \dots, X_n$ ב"ת, ש"ה כך ש- $\mathbb{E}X_1^4 < \infty$ אז:

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{a.s.} \mathbb{E}X_1$$

וראינו בכיתה שאפילו:

$$\mathbb{E}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}X_1\right|^4\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

תרגיל. יהיו $A_1, A_2, \dots$ מאורעות ב"ת כך ש- $\mathbb{P}(A_n) < 1$ לכל n . נניח ש- $S = \mathbb{1}_{A_1} + \dots < \infty$ כ"ב.
האם $S = \infty$ כ"ב.

פתרון. נסמן $B = \{\omega : S < \infty\}$. נגדיר $B_m = \{\forall n > m : \mathbb{1}_{A_n} = 0\}$, $m = 0, 1, \dots$. מתקיים

$$B = \bigcup_{m=0}^{\infty} B_m$$

נניח בשלילה.

$$0 < pr(B) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_m)$$

לכן קיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש- $\mathbb{P}(B_m) > 0$ עכשיו כי A_i ב"ת:

$$\mathbb{P}(S = 0) = \mathbb{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n} = 0\right) \cdot \mathbb{P}(B_m) = \prod_1^m \mathbb{P}(\mathbb{C}A_n) \cdot \mathbb{P}(B_m) > 0$$

וזאת סתירה כך ש- $\mathbb{P}(S = 0) = 0$.

משפט. SLLN

ניח ש- $X_1, X_2, \dots$ ש"ה ב"ת וכן $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ אז $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{a.s.} \mathbb{E}X_1$

תרגיל. תהי $x_0 = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$ נגדיר נקודות במישור באופן אינטואיטיבי: x_{n+1} נבחר אוניפורמית מתוך מעגל ברדיוס $|x_n|$ סביב הראשית.
הוכיחו כי $\frac{x_{n+1}}{|x_n|} \xrightarrow{a.s.} c$ ומצאו את c .

פתרון. נשים לב, זה מתפלג באופן אחיד על דיסק היחידה וב"ת ב- $x_1, \dots, x_n$, לכן,

$$\begin{aligned} n^{-1} \log |x_n| &= n^{-1} \log \left(\left| \frac{x_n}{x_{n-1}} \right| \cdot \left| \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \right| \cdot \dots \cdot \left| \frac{x_1}{x_0} \right| \right) = \\ &= n^{-1} \sum_{i=1}^n \log \left(\left| \frac{x_i}{x_{i-1}} \right| \right) \xrightarrow{a.s.} SLLN \mathbb{E} \log |X_1| \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \cdot \log r = 2 \int_0^1 r \log r dr = -1$$

הטענות שהובילו ל- $SLLN$:

טענה. אי שוויין קולמגורוב: $X_1, X_2, \dots$ ב"ת עם $\mathbb{E}X_k = 0$ ו- $\mathbb{E}X_k^2 < \infty$ אז לכל $c > 0$ מתקיים:

$$\mathbb{P}(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}S_n^2}{c^2}$$

הערה. חזק ממרקוב.

טענה. $X_1, X_2, \dots$ ב"ת עם $\mathbb{E}X_k = 0$ אם $\sum \text{Var}(x_i) < \infty$ אז $\sum X_n$ מתכנס כ"ב.

למה. קרוניקר עבור $x_n \in \mathbb{R}$ כך ש- $\sum \frac{x_n}{n} \rightarrow 0$ מתכנס אז $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \rightarrow 0$.

משפט. $X_1, X_2, \dots$ ב"ת ש"ה $\mathbb{E}X_i = 0$, $\mathbb{E}X_i^2 = \sigma^2 < \infty$. לכל $\varepsilon > 0$ שנקבע מתקיים:

$$\frac{S_n}{n^{1/2}(\log n)^{(\frac{1}{2}+\varepsilon)}} \xrightarrow{a.s} 0$$

הערה. למעשה מתקיים:

$$\limsup \frac{S_n}{n^{1/2}(\log n)^{1/2}} = \sigma\sqrt{2}$$

הוכחה. נגדיר $a_n = n^{1/2}(\log n)^{(\frac{1}{2}+\varepsilon)}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}\left(\frac{X_n}{a_n}\right) = \sigma^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{(1+2\varepsilon)}} < \infty$$

לכן ממשפט קולמגורוב:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{a_n}$$

□

מתכנס כ"ב ואז משיעורי בית $\frac{S_n}{a_n} \xrightarrow{a.s} 0$ (רמז: מהלמה של קרוניקר).

תרגיל. $X_1, X_2, \dots$ ב"ת ש"ה $\mathbb{E}X_i = 0$, $\mathbb{E}X_i^2 = \sigma^2 < \infty$. לאילו $\gamma \in \mathbb{R}$ מובטח ש- $\frac{1}{n} \sum \frac{X_i}{i^\gamma} \xrightarrow{a.s} 0$?

פתרון. נניח $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(X_i)}{i^2} < \infty$ מתכנס. אז $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{a.s} 0$ מדוע? כי

$$\sum \text{Var}\left(\frac{X_i}{i}\right) < \infty$$

עפ"י הנתון אז מקולמגורוב:

$$\sum \frac{X_i}{i}$$

מתכנס כ"ב ואז $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ומכאן למצוא γ זה כבר לא בעיה.