

הסתברות למתמטיקאים – תרגול 5

30.03.11

שאלה. מבחן 0102

תהי $A_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n : 3(x_1 + \dots + x_n) > 2n + \sqrt{n}\}$ מצאו

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \int_{A_n} \dots \int x_1 \dots x_n dx_1 \dots dx_n$$

פתרון. נשים לב שעל $[0, 1]$ $d\mu = 2x dx$ היא מידת הסתברות.

$$\int_0^1 2x dx = 1$$

עכשיו יש למצוא:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \int_{A_n} \dots \int x_1 \dots x_n dx_1 \dots dx_n = \mathbb{P}(A_n)$$

כאשר x_i ב"ת מתפלגים $d\mu$ ואכן,

$$\mathbb{E}x_1 = 2 \int_0^1 x \cdot x dx = \frac{2}{3}$$

וזה מצויין.

$$\mathbb{E}(x_1 - \frac{2}{3})^2 = \frac{1}{18}$$

עכשיו $x_1 - \frac{2}{3}$ הוא מ"מ עם תוחלת 0 ושונות 1. עכשיו,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}\left(\frac{(x_1 - \frac{2}{3}) + \dots + (x_n - \frac{2}{3})}{\sqrt{n}} > 1\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(\sqrt{18} \frac{(x_1 - \frac{2}{3}) + \dots + (x_n - \frac{2}{3})}{\sqrt{n}} > \sqrt{18}\right) \xrightarrow{CLT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{18}}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \end{aligned}$$

ראינו בכיתה:

תזכורת. נניח $x_1, \dots, x_n$ ב"ת, ש"ה, $y_1, \dots, y_n$ ב"ת ש"ה כך ש- $\mathbb{E}x_1 = \mathbb{E}y_1 = 0$, $\mathbb{E}x_1^2 = \mathbb{E}x_2^2 = 1$. תהי f גזירה ברציפות וחסומה ב- $\mathbb{R}$ שלוש פעמים. אז

$$\mathbb{E}f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{\sqrt{n}}\right) - \mathbb{E}f\left(\frac{y_1 + \dots + y_n}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

למעשה

$$\mathbb{E}f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{\sqrt{n}}\right) - \mathbb{E}f\left(\frac{y_1 + \dots + y_n}{\sqrt{n}}\right) \leq \varepsilon_n(\|f'''\| + \|f''\|)$$

כאשר ε_n תלוי רק ב- μ, ν .

הערה. אפשר $\mathbb{E}x_1 = \mathbb{E}y_1 = n$ ו- $\mathbb{E}x_1^2 = \mathbb{E}y_1^2 = \sigma^2$.

ראינו גם:

מסקנה.

$$\mathbb{E}f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2/2} dx$$

הסבר. עבור $x \sim N(0, 1)$ מקבלים $\frac{x_1 + \dots + x_n}{\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$.

תרגיל. מצאו:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \cos\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{\sqrt{n}}\right) dx_1 \dots dx_n$$

פתרון. הגבול הנ"ל הוא בדיוק:

$$\mathbb{E} \cos\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{\sqrt{n}}\right)$$

כאשר $x_i \sim U(-1, 1)$.

לכן, מהטענה, נובע כי אם $y_1 \sim N(0, \sigma^2)$ (כאשר $\mathbb{E}y_1 = \mathbb{E}x_1 = 0$, $\mathbb{E}y_1^2 = \mathbb{E}x_1^2$) אז

$$\mathbb{E} \cos\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow \mathbb{E} \cos y_1$$

נחשב:

$$\sigma^2 = \mathbb{E}x_1^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

אז

$$\mathbb{E} \cos y_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\frac{1}{3})}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(y) e^{-\frac{y^2}{2(\frac{1}{3})}} dy$$

איך נחשב:

באופן כללי אפשר לפתור אינטגרל מהצורה זו כך: (נסמן תוחלת m ושונות σ^2).

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \cos x &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{ix} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \\ &= \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{[x-(m+i\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{\sigma^2-2mi}{2}} dx = \\ &= \int \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{2mi-\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-(m+i\sigma^2))^2}{2\sigma^2}} dx = \\ &= e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \cos m\end{aligned}$$

במקרה שלנו $m=0, \sigma^2=\frac{1}{3}$ וקיבלנו $e^{-1/6}$.

שאלה.

$$\limsup \int_0^1 \dots \int_0^1 \cos\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{\sqrt{n}}\right) dx_1 \dots dx_n$$

רעיון: המ"מ אינם ממורכזים. אילו בודקים ל- y_1 גאוסיאן עם אותה תוחלת ואותה שונות אז מקבלים:

$$\frac{y_1 + \dots + y_n}{\sqrt{n}} \sim N\left(\frac{\sqrt{n}}{2}, \sigma^2\right)$$

ואז

$$\mathbb{E} \cos\left(\frac{s_n}{\sqrt{n}}\right) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \cos \frac{\sqrt{n}}{2}$$

ואז מנתחים את הסדרה הזו. לפי הלמה החזקה יותר יש אותם גבולות חלקיים למקרה שלנו. במקרה הזה יש עוד דרך:

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \cos\left(\frac{(x_1 - \frac{1}{2}) + \dots + (x_n - \frac{1}{2})}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}2\right) dx_1 \dots dx_n$$

ואפשר לפרק:

$$\cos(\alpha + \beta) = \operatorname{Re} e^{i(\alpha+\beta)} = \operatorname{Re}(e^{i\alpha} e^{i\beta}) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

אז

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \dots \int_0^1 \cos\left(\frac{(x_1 - \frac{1}{2}) + \dots + (x_n - \frac{1}{2})}{\sqrt{n}} + \frac{n}{2}\right) dx_1 \dots dx_n = \\ &= \cos(\sqrt{n}2) \int \dots \int \cos\left(\frac{(x_1 - \frac{1}{2}) + \dots + (x_n - \frac{1}{2})}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) \int \dots \int \sin(\dots) \quad (\text{מתנהג כמו גאוסיאן})\end{aligned}$$

בורל קנטלי

1. אם $\sum \mathbb{P}(A_k) < \infty$ אז $S = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_k} < \infty$ כ"ב.
 או $\mathbb{P}(A_k i.o.) = 0$ כאשר $\mathbb{P}(\limsup A_k) = \mathbb{P}(A_k i.o.)$ כאשר $\limsup A_k = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k$.
 2. עבור $A_1, \dots$ ב"ת אם $\sum \mathbb{P}(A_k) = \infty$ אז $S = 0$ כ"ב.
- דוגמא.** $x_n \xrightarrow{a.s.} 0$ אם $\varepsilon > 0$ לכל $\Pr(|x_n| > \varepsilon i.o.) = 0$

שימושים:

משפט. $X_n \rightarrow X$ הסבגברות אס"ס לכל תת-סדרה X_{n_m} קיימת תת-סדרה $x_{n_{m_k}} \xrightarrow{a.s.} x$

הוכחה. $\Leftarrow$: $x_n \xrightarrow{P_y} x$ תהי $\varepsilon_n \searrow 0$ אז לכל k קיים $n_k > n_{k-1}$ כך ש-

$$\mathbb{P}(|x_{n_k} - x| > \varepsilon_k) \leq 2^{-k}$$

לכן מתקיים

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(|x_{n_k} - x| > \varepsilon_k) \leq \sum 2^{-k} = 1$$

מבורל קנטלי הראשון מתקיים:

$$\mathbb{P}(|x_{n_k} - x| > \varepsilon_k i.o.) = 0$$

□

ולכן $x_{n_k} \xrightarrow{a.s.} 0$