

הסתברות למתמטיקאים – תרגול 4

23.03.11

משפט. [הגבול המרכזי]
ניח $\mathbb{E}X_1^2 = 1, \mathbb{E}X_1 = 0$ אז

$$\mathbb{P}(a\sqrt{n} < S_n < b\sqrt{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx$$

תרגיל. נתבונן בקוביית היחידה K_{2n} ב- $\mathbb{R}^{2n}$ ממורכזת סביב הראשית. נסמן

$$v_{2n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2n}}, \frac{2}{\sqrt{2n}}, \frac{1}{\sqrt{2n}}, \frac{2}{\sqrt{2n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2n}}, \frac{2}{\sqrt{2n}} \right)$$

חשבו:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Vol}_{2n}(\{x \in \mathbb{R}^{2n} : -1 \leq x \cdot v_{2n} \leq 1\} \cap K_{2n})$$

פתרון. יהי x מ"מ מתפלג יוניפורמית ב- $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^{2n}$ ב- K_{2n} . נסמן:

$$A_n := \{x \in \mathbb{R}^{2n} : -1 \leq x \cdot v_{2n} \leq 1\} \cap K_{2n}$$

אז,

$$\text{Vol}_{2n}(A_n) = \mathbb{P}(x \in A_n)$$

$$\{x \in A_n\} = \{x = (x_1, \dots, x_{2n}) \in K_{2n} : -1 \leq \sum_{i=1}^{2n} x_i v_{2n}^i \leq 1\}$$

נגדיר:

$$y_1 = x_1 + 2x_2, \quad y_2 = x_4 + 2x_4, \quad \dots \quad y_n = x_{2n-1} + 2x_n$$

נשים לב:

$$\{x \in A_n\} = \{-1 \leq \frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{i=1}^n y_i \leq 1\}$$

נחשב:

$$\mathbb{E}y_i = \mathbb{E}x_1 + 2\mathbb{E}x_2 = 0 + 0 = 0$$

$$\mathbb{E}y_1^2 = \mathbb{E}x_1^2 + 4\mathbb{E}x_2^2 = \left[\int_{-1/2}^{1/2} x^2 dx = 2 \frac{x^3}{3} \Big|_0^{1/2} = \frac{1}{12} \right] = \frac{5}{12}$$

נגדיר:

$$z_j = \sqrt{\frac{25}{5}} \cdot \left(\frac{y_j}{\sqrt{2}} \right)$$

ואז $\mathbb{E}(z_i) = 0$, $\mathbb{E}(z_i^2) = 1$ כעת:

$$\begin{aligned} \{x \in A_n\} &= \left\{ -\sqrt{\frac{25}{5}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n z_j \leq \sqrt{\frac{24}{5}} \right\} = \\ &= \mathbb{P} \left(-\sqrt{\frac{24}{5}} \leq \frac{\sum_{j=1}^n z_j}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{\frac{24}{5}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{\frac{24}{5}}}^{\sqrt{\frac{24}{5}}} e^{-x^2/2} dx \end{aligned}$$

עפ"י משפט הגבול המרכזי.

תרגיל. מצאו:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \text{Vol}_n \{ (x_1, \dots, x_n) \in [-1, 1]^n : x_1^{-1/3} + \dots + x_n^{-1/3} > \sqrt{n} \}$$

פתרון. נסמן,

$$A_n := \{ (x_1, \dots, x_n) \in [-1, 1]^n : x_1^{-1/3} + \dots + x_n^{-1/3} > \sqrt{n} \}$$

נשים לב:

$$2^{-n} \text{Vol}_n(A_n) = \mathbb{P}(x_1^{-1/3} + \dots + x_n^{-1/3} > \sqrt{n})$$

כאשר x_i מתפלגים אחיד ב- $[-1, 1]$ ב"ת.

נגדיר $y_i, y_i = x_i^{-1/3}$ ב"ת ש"ה.
כעת,

$$2^{-n} \text{Vol}_n(A_n) = \mathbb{P}(y_1 + \dots + y_n > \sqrt{n})$$

נחשב:

$$\mathbb{E}y_i = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^{-1/3} dx = 0$$

$$\mathbb{E}y_i^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^{-2/3} dx = 3x^{1/3} \Big|_0^1 = 3$$

$$z_k = \frac{1}{\sqrt{3}} y_k \quad \text{נגדיר כעת,}$$

$$\mathbb{P}(x_1^{-1/3} + \dots + x_n^{-1/3} > \sqrt{n}) = \mathbb{P}(z_1 + \dots + z_n > \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{n}) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$$

הגדרה.

$$(\nu * f)(x) = \int f(x+y) \nu(dy)$$

כאשר f רציפה וחסומה ב- $\mathbb{R}$, ν מידת הסתברות ב- $\mathbb{R}$.
קיים:

$$(\mathbb{P}_X * f)(a) = \mathbb{E}f(x+a)$$

עבור X, Y ב"ת:

$$\mathbb{P}_{X+Y} * f = \mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y * f$$

$$(\mu * \nu)(B) = (\mu \times \nu)((x, y) : x + y \in B)$$

תרגיל.

$$N(0, 1) * N(0, 1) = N(0, 2)$$

פתרון. צ"ל שאם $X \sim N(0, 1)$, אז $Y \sim N(0, 2)$ ו- $X+Y \sim N(0, 1)$.
הבחינה: פונקציית הצפיפות של ההתפלגות המשותפת של X ו- Y :

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

זו פונקציה רדיאלית, אינווריאנטית לסיבובים.
נקבל שלכל α :

$$X \cos \alpha + Y \sin \alpha$$

יש אותה התפלגות.

$$\mathbb{P}(X \cos \alpha + Y \sin \alpha \in B) = \frac{1}{2\pi} \int \int \mathbb{1}_{\{x \cos \alpha + y \sin \alpha \in B\}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy$$

נשתמש בהצבה שהיא סיבוב:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \int \mathbb{1}_{\{x' \in B\}} e^{-\frac{x'^2 + y'^2}{2}} dx' y' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathbb{1}_{x \in B} e^{-x^2/2} dx$$

בפרט, $X + Y \sim N(0, 2)$ לכן $\frac{X+Y}{\sqrt{2}} \sim X$
אפשר באותו אופן לקבל ש- $\alpha X + \beta Y \sim N(0, \alpha^2 + \beta^2)$ וגם $N(a, \sigma_1^2) * N(b, \sigma_2^2) =$
 $N(a+b, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ וכן $X_1, \dots, X_n$ ב"ת ש"ה $X_i \sim N(0, \sigma^2)$ אז $\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \sim N(0, \sigma^2)$

שאלה 6 תרגיל 3: $X_1, \dots, X_n$ בלתי מתואמים, $\mathbb{E}(x_i) = 0$, $\frac{\text{Var}(x_i)}{i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$

$$\mathbb{E} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = 0$$

$$\text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} (\text{Var}(x_1) + \text{Var}(x_n))$$

$$\Pr\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(x_i)\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$