

הסתברות למתמטיקאים – תרגול 2

09.03.11

נדבר עוד על השקילות בין מידה אחידה על $[0, 1]$ לסדרה אינסופית של הטלות הוגנות. ראינו בשעור שאפשר להגדיר סדרה אינסופית של מ"מ ב"ת המתפלגים כמטבע הוגן ע"י:

$$X_n(\omega) = \omega_n \text{ תיבנה הגצהב תי"ב } (*)$$

טענה. נניח $([0, 1], \mathcal{B}, \mu)$ ונניח שהסדרה $(*)$ מקיימת $X_1, \dots$ המוגזרת ע"י $(*)$ מקיימת שהיא ב"ת וכל X_i מתפלג כמו מטבע הוגן אז $\mu = \lambda$.

הוכחה. ממשפט קראתאודורי מספיק להראות שעבור קבוע דיאדי $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$ מתקיים

$$\mu([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]) = \frac{1}{2^n} = \lambda([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}])$$

ואכן נתבונן בקטע דיאדי $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$. כלומר בדיוק n הספרות הראשונות בהצגה הבינארית קבועות.

$$\begin{aligned} \mu([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]) &= \mu(X_1 = \alpha_1 \wedge, \dots, \wedge, X_n = \alpha_n) = \\ &= \mu(X_1 = \alpha_1) \cdot \dots \cdot \mu(X_n = \alpha_n) = \frac{1}{2^n} = \lambda([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]) \end{aligned}$$

□

משפט. מקרה פשוט של סטיות גדולות עבור S_n הילוך מקרי פשוט, מתקיים

$$\forall c \in (0, 1) \quad \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} > c) \rightarrow -\gamma(c)$$

$$\gamma(c) = \frac{1}{2} \ln(1+c) \cdot (1+c) + \frac{1}{2} \ln(1-c) \cdot (1-c) \text{ כאשר}$$

תרגיל. עבור $a \neq b, a, b \in (0, 1)$ הראו כי:

$$\frac{\mathbb{P}(S_n > an \wedge S_{2n} - S_n > b_n)}{\mathbb{P}(S_{2n} > (a+b) \cdot n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

פתרון. נוציא $\log$ כדי להשתמש במשפט. נשים לב שהחצי הראשון והשני של ההילוך ב"ת. לכן:

$$\mathbb{P}(S_n \geq an \wedge S_{2n} - S_n > b_n) = \mathbb{P}(S_n < a_n) \cdot \mathbb{P}(S_n > b_n)$$

נוציא $\log$ ונכפיל $\frac{1}{n}$:

$$\frac{1}{n} \left[\log \left(\mathbb{P}(S_n > a_n) \right) + \log \left(\mathbb{P}(S_n > b_n) \right) - \log \left(\mathbb{P}(S_{2n} > (a+b)n) \right) \right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\gamma(a) - \gamma(b) + 2\gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

וצריך לוודא שיצא מספר שלילי באגף ימין (כדי שמה שביפנים ישאר ל-0) $\frac{1}{n} \log \rightarrow -c \Rightarrow$
 $\log \rightarrow -cn \Rightarrow x \rightarrow 0$
 וזה נובע מקמירות. גוזרים פעמיים ויצא חיובי.

הטלת מטבע לא הוגן

סיכוי p לקבל 1 ואחרת 0. הילוך מקרי מתאים:

$$S_{n,p} = a_1 + \dots + a_n$$

משפט. מקרה פרטי של החוק החלש

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_{n,p}}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

משפט. וירשטראס

הפולינומים צפופים ב- $C[0, 1]$.

הוכחה. תהי f רציפה ב- $[0, 1]$. אז היא רציפה במ"ש ב- $[0, 1]$. נגדיר

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

יהי $\delta > 0$ מתקיים:

$$|P_n(x) - f(x)| = \sum \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) \leq$$

$$\leq \sum_{k: |\frac{k}{n} - x| \geq \delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} |f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)| + \sum_{k: |\frac{k}{n} - x| < \delta} \quad := I_1 + I_2$$

f רציפה במ"ש ב- $[0, 1]$ לכן נבחר $\delta > 0$ כך ש- $|f(\frac{k}{n}) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ כאשר $|x - \frac{k}{n}| < \delta$. אז $I_2 < \frac{\varepsilon}{2} \left(\sum \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\right) = \frac{\varepsilon}{2}$
 מה עם I_1 ? נשים לב שהביטוי של I_1 הוא בדיוק

$$2MP\left(\left|\frac{S_{n,k}}{n} - x\right| \geq \delta\right) \rightarrow 0$$

□

משפט. ההתכנסות המונוטונית

(Ω, Σ, μ) מרחב מידה. תהי $f_1, f_2, \dots$ סדרה לא יורדת של פונקציות מדידות המקבלות ערכים ג' $- [0, \infty]$ לכל $i \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in \Omega$.
 נניח $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ אז f מדידה ומתקיים $\int_{\Omega} f_n(x) d\mu = \int_{\Omega} f d\mu$.
 למקרה דיסקרטי (μ בדידה) המשפט נותן:
 אם $a_{j,k}$ סדרת מספרים אי שליליים לא יורדת במובן של $a_{j,k} \leq a_{j+1,k}$ אז

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{j \rightarrow \infty} a_{j,k}$$

דוגמא.

$$(1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\frac{1}{n})^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}$$

$a_{n,k} = 0$ מסויים $k > n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,k}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

תיקון ההוכחה:

$$P(|\frac{S_{n,x}}{n} - x| \geq \delta) \leq \frac{\mathbb{E}(\frac{S_{n,x}}{n} - x)^2}{\delta^2} = \frac{x(1-x)}{\delta^2 n} \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

עפ"י מרקוב.

באותו אופן אפשר באמת להוכיח את המשפט.
 ודאו שפוביני-טונללי נותן:

$$\sum_k \sum_n a_{n,k} = \sum_n \sum_k a_{n,k}$$

עבור $a_{n,k} \geq 0$

התפלגות פואסונית:

תזכורת. אם $x_1, \dots, x_n$ מ"מ ב"ת המקבלים את הערך 1 הסתברות $\frac{\lambda}{n}$ ואחרת 0. נגדיר:

$$S_{n, \frac{\lambda}{n}} = \sum_{j=1}^n x_j$$

משפט. $[plt]$

בסקים:

$$\mathbb{P}(S_{n, \frac{\lambda}{n}} = k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_{\lambda}(k)$$

כאשר

$$P_{\lambda}(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

תרגיל. הראו כי $\mathbb{P}_\lambda * \mathbb{P}_\lambda = \mathbb{P}_{2\lambda}$ כאשר

$$(\mathbb{P}_\lambda * \mathbb{P}_\lambda)(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} P_\lambda(j) \cdot P_\lambda(k-j) = \sum_{j=0}^k P_\lambda(j) P_\lambda(k-j)$$

הסבר הסתברותי: זה בדיוק ההתפלגות של סכום של שני משתנים מקריים ב"ת מתפלגים $\mathbb{P}_\lambda: \mathbb{P}(X_1 + X_2 = k)$.

פתרון. יהיו $S_n, \hat{S}_n$ מ"מ מתפלגים ביומית $B(n, \frac{\lambda}{n})$ כלומר ניקח $2n$ מ"מ ש"ה עם סיכוי $\frac{\lambda}{n}$ לקבל 1 (אחרת 0).

נסמן אותם $x_1, \dots, x_{2n}$. נסמן $Y_n = S_n + \hat{S}_n$. נחלק את $2n$ המחוברים ל- n זוגות. נראה כי $\mathbb{P}(Y_n = k) \rightarrow \mathbb{P}_{2\lambda}(k)$.

$$(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + \dots + (x_{2n-1} + x_{2n})$$

נחקור איך מתפלג כזה זוג: $x_1 + x_2$.

$$(*) \begin{cases} 0, & (1 - \frac{\lambda}{n})^2 \\ 1, & 2 \cdot \frac{\lambda}{n} (1 - \frac{\lambda}{n}) \\ 2, & (\frac{\lambda}{n})^2 \end{cases}$$

זה לא בדיוק הילוך מקרי אבל אולי איכשהו.... נגדיר מאורע A : אין אף זוג שקיבל $(1, 1)$ כלומר $x_i + x_j \neq 2$. נחקור את $\mathbb{P}(Y_n = k | A)$. הזוגות בלתי תלויים לכן מספיק להבין איך אחד הזוגות מתנהג: לפי הסתברות מותנה:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x_1 + x_2 = 1 | A) &= \frac{\mathbb{P}(x_1 = 1, x_2 = 0) + \mathbb{P}(x_1 = 0, x_2 = 1)}{1 - (\frac{\lambda}{n})^2} = \\ &= \frac{2 \frac{\lambda}{n} (1 - \frac{\lambda}{n})}{(1 - \frac{\lambda}{n})(1 + \frac{\lambda}{n})} = \frac{2\lambda}{1 + \frac{\lambda}{n}} \end{aligned}$$

כלומר, $Y_n | k$ מתפלג כמו סכום של n משתנים ב"ת עם סיכוי $\frac{2\lambda}{1 + \frac{\lambda}{n}}$ ל-1 ואחרת זה 0. זה כמעט מתקרב ל- $P_{2\lambda}(k)$. קיים:

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}(Y_n = k) - \mathbb{P}_{2\lambda}(k)| &= |\mathbb{P}(A \cap (Y_n = k)) + \mathbb{P}(\mathcal{C}A \cap (Y_n = k)) - \mathbb{P}_{2\lambda}(k)| \leq \\ &\leq |\mathbb{P}(A \cap (Y_n = k)) - \mathbb{P}_{2\lambda}(k)| + |\mathbb{P}(\mathcal{C}A)| = |P(A) \cdot \mathbb{P}(Y_n = k | A) - P_{2\lambda}(k)| + P(\mathcal{C}A) \end{aligned}$$

ניתן חסם ל- $\mathbb{P}(\mathcal{C}A)$: לפי אי שוויון ברנולי:

$$\mathbb{P}(A) = (1 - (\frac{\lambda}{n})^2)^n \geq 1 - n \cdot \frac{\lambda^2}{n^2} = 1 - \frac{\lambda^2}{n}$$

לכן,

$$\mathbb{P}(\mathbb{C}A) \leq \frac{\lambda^2}{n} \rightarrow 0$$

נותר להראות שהכל מסתדר, זה קצת חסר עכשיו.

$$|\mathbb{P}(Y_n = k|A) - \mathbb{P}_{2\lambda}(k)| \rightarrow 0$$

אפשר פשוט לחזור להוכחה ולהראות שזה בסדר.
מצד שני,

$$\mathbb{P}(Y_n = k) = \sum_{j=0}^k \underbrace{\mathbb{P}(S_n = j)}_{\rightarrow \mathbb{P}_\lambda(j)} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(\hat{S}_n = k - j)}_{\mathbb{P}_\lambda(k-j)}$$

אבל

$$\sum \mathbb{P}_\lambda(j) \cdot \mathbb{P}_\lambda(k - j) = (\mathbb{P}_\lambda * \mathbb{P}_\lambda)(k)$$

ומיחידות הגבול נובע השוויון.