

הסתברות למתמטיקאים – תרגול 12

25.5.11

מרטינגלים

תזכורת. $(M_n)_n$ מרטינגל, $\mathbb{E}M_n = \mathbb{E}M_0$. אם T הוא זמן עצירה ו- $(M_n)_n$ מרטינגל אז $M_{n \wedge T}$ גם מרטינגל וברפט $\mathbb{E}M_0 = \mathbb{E}M_{n \wedge T}$.

תרגיל. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציית מתח המקיימת $f(A = (0, 0)) = 0$, $f(B = (0, 1)) = 1$ ובכל נקודה אחרת $f(x) = \frac{1}{4} \sum_{y \sim x} f(y)$. אם $y \sim x$ הוא השכן של x על רשת.

1. האם קיים פתרון חסום למערכת?

2. האם קיים עוד פתרון, כלשהו?

3. האם קיים עוד פתרון חסום?

פתרון.

1. נסמן:

$$f(x) = \underbrace{\mathbb{P}(\text{מה הסיכוי שהילוך מקריפשוט שהתחיל ב-} x \text{ מגיע ל-} B \text{ לפני שהגיע ל-} A)}_D$$

נראה ש- f מקיימת את התנאים:

$$f(A) = 0 \quad f(B) = 1$$

זה טריוויאלי.

עבור נקודה אחרת:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D) &= \\ &= \mathbb{P}(\text{הצעד הראשון ימינה}) \cdot f(x + (1, 0)) + \mathbb{P}(\text{צעד ראשון שמאלה}) \cdot f(x - (1, 0)) + \\ &+ \mathbb{P}(\text{צעד ראשון למטה}) \cdot f(x - (0, 1)) + \mathbb{P}(\text{צעד ראשון למעלה}) \cdot f(x + (0, 1)) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{y \sim x} f(y) \end{aligned}$$

2. עבור $g(x, y) = y$, הפתרון מהסעיף הקודם, מתקיים:

$$h(x, y) = \frac{1}{2}(f(x, y) + g(x, y))$$

פותרת את המערכת.

$$h(A) = \frac{1}{2}(f(A) + g(A)) = 0 + 0 = 0$$

$$h(B) = \frac{1}{2}(f(B) + g(B)) = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$h(x, y) = \frac{1}{2}(f(x, y) + g(x, y))$$

ולמעשה גם $g(x, y)$ מקיימת את התנאים.

3. נניח שקיימת f חסומה נוספת ל- f_0 מהסעיף הראשון כך ש- $f \neq f_0$. נקבע $x_0 \in \mathbb{R}^2$. נסמן ב- S_n את ההילוך המקרי הפשוט שמתחיל מ- x_0 . S_n הוא מרטינגל. נגדיר

$$\tilde{S}_n = S_{n \wedge T_0} = \begin{cases} S_n & m \leq T_0 \\ S_{T_0} & n > T_0 \end{cases} \text{ אז גם } T_0 = \inf\{n : S_n \in A, B\}$$

הוא מרטינגל. אז גם $f(\tilde{S}_n)$ הוא מרטינגל כי:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(S_{n+1})) &= \mathbb{E}(f(S_n + x_{n+1})) = \\ &= \mathbb{P}(x_{n+1} = (1, 0)) \cdot f(S_n + (1, 0)) + \dots + \mathbb{P}(x_{n+1} = (0, -1)) \cdot f(S_n + (0, -1)) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{y \sim x} f(S_n + y) = f(S_n) \end{aligned}$$

למעשה כל הפעלה של פונקציה הרמונית על מרטינגל היא מרטינגל.

לכן $\mathbb{E}f(\tilde{S}_n) = f(x_0)$. כעת, נסמן ב- D_n את המאורע בו הגענו ל- A או ל- B ב- n צעדים. אז $\mathbb{P}(\bigcup D_n) = 1$ (כי זה אומר שמתישהו הגענו ל- B או ל- A). אבל זאת שרשרת עולה $D_n \subseteq D_{n+1}$ כי זה תהליך עצירה, לכן $\mathbb{P}(D_n) \rightarrow 1$. כעת, $f(x_0) = \mathbb{E}f(\tilde{S}_n) = \int_n f(\tilde{S}_n) + \int_n f(\tilde{S}_n) + \int_n f(\tilde{S}_n) + \dots$ (הגענו ל- A בזמן n) $+ \int_{\mathbb{C}D_n} f(\tilde{S}_n) = 1 \mathbb{P}(n \text{ בזמן } B \text{ הגענו ל-} B) + o \cdot \mathbb{P}(n \text{ בזמן } A \text{ הגענו ל-} A) + \int_{\mathbb{C}D_n} f(\tilde{S}_n)$. f לחסומה ו- $\mathbb{P}(\mathbb{C}D_n) \rightarrow 0$ לכן $\int_{\mathbb{C}D_n} f(\tilde{S}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ לכן אין עוד פונקציה כנ"ל חסומה.

תרגיל למחשבה - לחשוב על אותו תרגיל בשלושה ממדים. כנאה שתהיה יותר מפוקנציה חסומה אחת כזאת.

משפט. יהי $(M_n)_n$ מרטינגל חסום (קיים $M > 0$ כך ש- $|M_n| < M$ כ"ל לכל n). אז קיים $\lim M_n$ כ"ל.

ראינו אפילו משהו חזק יותר, שמרטינגל חיובי מתכנס למ"מ אינטגרביילי כ"ב. פשוט ע"י הוספת קבועה מספיק גדול.

תרגיל. הראו שפונקציה הרמונית על $\mathbb{Z}^2$, אשר חסומה, היא קבועה.

הוכחה. נגדיר הילוך מקרי פשוט על $\mathbb{Z}^2$. S_n אז $f(S_n)$ מרטינגל חסום (כי f הרמונית וחסומה). לכן מהמשפט הקודם, $f(S_n)$ מתכנס כ"ב למשתנה מקרי x . נניח של- f יש שני ערכים שונים: $f(x_1) \neq f(x_2)$. היות ו- S_n נשנה, אז בהסתברות 1 S_n מבקר אינסוף פעמים ב- x_1 וב- x_2 . כלומר, על קבוצה ממידה 1, לכל N קיימים $m, n > N$ כך ש- $f(S_m) = f(x_2), f(S_n) = f(x_1)$. לכן $\{f(S_n)\}$ היא לא סדרת קושי. אז היא לא יכולה להתכנס. וזאת סתירה ולכן f קבועה.

□

Optional stopping theorem

טענה. יהי $(M_n)_n$ חסום ע"י c ויהי זמן עצירה T . $ET < \infty$ אז $EM_T = EM_0$.

הוכחה.

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(M_{n \wedge T} - M_T)| &= \\ &= \left| \underbrace{\int_{T \leq M} (M_{n+T} - M_t)}_{=0} + \int_{T > n} (M_{n \wedge T} - M_t) \right| \leq \\ &\leq \int |M_{n \wedge T} - M_T| \cdot M_{T > n} \leq 2c \int \mathbb{1}_{T > n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

לכן,

$$EM_0 = EM_{n \wedge T} \rightarrow EM_T$$

□

טענה. נניח $ET < \infty$ ו- $(M_n)_n$ הוא מרטינגל המקיים

$$\forall n \quad |M_n - M_{n-1}| \leq K$$

$$K \text{ כלשהו, אז } EM_t = EM_0.$$

זאת טענה קשה יותר, ועל כן נשארת כתרגיל בית.

תרגיל. קוף יושב ליד מקלדת ומקליד כל פרק זמן של שנייה אות מתוך ה- $A, B, \dots, Z$ (אין כפתורים על המקלדת) כמובן באופן אקראי. מהי תוחלת הזמן עד שתופיע לראשונה המילה *ABRACADABRA*?

פתרון. נחשוב על המשחק הבא. לפני כל הקלדה, נוציא שקל מכסנו ונאמר שעכשיו יופיע הרצף הנדרש. לפני כל הקלדה נוציא שקל מסיכינו ונאמר שמעתה (על כל שקל שהושקע) נקבל 26 שקלים אם האות המתאימה מופיעה ואחרת נפסיד את הכסף. נשקיע את כל הסכום שצברנו באות הבאה.

דוגמא. אחרי רצף של 4 אותיות: *ABRA* נרוויח 26^4 על ה-4 אותיות הראשונות ו-25 על האות האחרונה. הוצאנו 4 שקלים. אחרי רצף של *AAA* נקבל: $0 + 0 + 26$ ויצאו שלושה שקלים.

נשים לב שכל ההימורים שלנו הם עם תוחלת 0. אם יש x שקלים:

$$\mathbb{E}(\text{רווח בסיבוב הבא}) = \frac{x \cdot 25}{26} + \frac{25}{26} \cdot (-x) = 0$$

לכן הרווח $(M_n)_n$ בזמן n הוא מרטינגל. ניקח את T להיות זמן הופעה ראשונה של הרצף *ABRACADABRA*.

תרגיל. $\mathbb{E}(T) < \infty$ ולכן $T < \infty$ כ"ב.

מהו T ? הוא כמות הכסף שהושקעו עד שהופיע הרצף המתאים.

היות ו- $\mathbb{E}(T) < \infty$ אז $\mathbb{E}M_T = \mathbb{E}M_0$.

אם C_T הוא הכסף שקיבלנו, $\mathbb{E}C_T = \mathbb{E}(C_T - T) = \mathbb{E}M_T = 0$.

אז כמה כסף הרווחנו?

26^{11} על כל הרצף ו- 26^4 על 4 האותיות האחרונות ו- 26 על האות האחרונה.

לכן $\mathbb{E}C_T = 26^{11} + 26^4 + 26$,
לכן,

$$\mathbb{E}T = 26^{11} + 26^4 + 26$$