

הסתברות למתמטיקאים – תרגול 11

18.5.11

יש לנו גרף סופי $G = (V, E)$.

1. נאמר שהוא קשיר חלש אם $\emptyset \subsetneq A \subsetneq V$ אז
 $E \cap ((A \times (V \setminus A)) \cup ((V \setminus A) \times A)) \neq \emptyset$

2. נאמר שהוא רגולרי אם מספר הקשתות שיוצאות ונכנסות מכל צומת שווה. כלומר
 לכל $x \in V$

$$\#\{y : (x, y) \in E\} = \#\{y : (y, x) \in E\}$$

ראינו שגרף שמקיים שתי התכונות האלה אז הוא קשיר חזק.

טענה. גרף לא מחזורי, רגולרי לכל $x \in V$ קיים: $\mathbb{P}(S_n = x) \rightarrow \frac{1}{m}$ $m = |V|$.

טענה. (כאן לא צריך שהגרף לא מחזורי). אם $S_0 = x$ ו- T מסמן את הזמן חזרה ראשונה ל- x , אז $\mathbb{E}(T) = m$.

תרגיל. המילה *ABRACADABRA* משתנה ע"י החלפת שתי אותיות (שנבחרות באקראי (i, j) מתוך $\{1, 2, \dots, 11\} \times \{1, 2, \dots, 11\}$ יוניפורימט). מהי תוחלת מספר ההחלפת עד שחוזרים לאותה מילה.

פתרון. מספר המילים שמורכבות מהאותיות של המילה הנתונה:

$$m = \underbrace{\binom{11}{5}}_{5 \times A} \underbrace{\binom{6}{2}}_{2 \times B} \underbrace{\binom{4}{2}}_{2 \times R} \underbrace{\binom{2}{1}}_{1 \times A}$$

יש לנו גרף רגולרי (כל קודקוד הוא מילה) אותו מספר חצים יוצאים ונכנסים ולכן מטענה 2 $\mathbb{E}(T) = m$.

תרגיל. נתבונן בסדרות מהצורה $(a_1, \dots, a_n)$ כך שכל האיברים שלנו הם $\{3, 6\}$ לכל $a_k \in \{3, 6\}$ יהי A_n מספר הסדרות כך ש- $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ מתחלק ב-10. הוכח או הפרך:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{2^n} = \frac{1}{10}$$

רמז: גרף של 01 קודקודים.

פתרון. נבנה גרף של שאריות החלוקה ב-10. 10 צמתים שמתאימים לשאריות השונות. יש צלע מצומת a לצומת b אם $b \equiv a + 3 \pmod{10}$ או $b \equiv a + 6 \pmod{10}$. $x_0 = 0$, $S_n = x_1 + \dots + x_n$ כאשר x_i ב"ת ש"ה.

$$\mathbb{P}(x_i = 6) = \frac{1}{2} \quad \mathbb{P}(x_i = 3) = \frac{1}{2}$$

לכל קודקוד 2 חצים יוצאים ו-2 חצים נכנסים. למעשה מדובר בהילוך מקרי פשוט. הגרף לא מחזורי (יש מעגל מ-0 לעצמו באורכים נבדלים מ-1 דרך 3 ו-6). מתקיים: $\mathbb{P}(S_n = 0) = \frac{A_n}{2^n}$. מהטענה $\mathbb{P}(S_n = 0) \rightarrow \frac{1}{10}$.

הגדרה. יהי מרחב התסברות $(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$. יהי $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_0$. יהי $x \in \mathcal{F}_0$ עם $\mathbb{E}|x| < \infty$. תוחלת מותנה $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ היא משתנה מקרי Y המקיים:

$$1. y \in \mathcal{F}$$

$$2. \forall A \in \mathcal{F} \int_A x d\mathbb{P} = \int_A y d\mathbb{P}$$

משפט. קיים $y = (X|\mathcal{F})$ עם $\mathbb{E}|y| < \infty$ יחיד עד כדי $a.s$ $y = y'$.

דוגמאות.

1. $x = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \Rightarrow x \in \mathcal{F}$. התנאי הראשון נתון והשני מתקיים בברור.

2. נניח X ב"ת ב- $\mathcal{F}$. כלומר, לכל $A \in \mathcal{F}$ וכל $B \in \mathcal{B}$ מתקיים:

$$\mathbb{P}(\{x \in B\} \cap A) = \mathbb{P}(\{x \in B\}) \cdot \mathbb{P}(A)$$

$$\text{אזי } \mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(X)$$

$$\int_A x d\mathbb{P} = \mathbb{E}(x \cdot \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}\mathbb{1}_A = \int_A \mathbb{E}x d\mathbb{P}$$

מרטינגלים

פילטרציה היא סדרה עולה של σ שדות:

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}$$

תהליך מותאם הוא סדרה של מ"מ $x_0, \dots$ כך ש- $x_k \in \mathcal{F}_k$. הסדרה $(x_n)_n$ תקרא מרטינגל אם:

$$(א) \mathbb{E}|x_n| < \infty$$

$$(ב) (x_n)_n \text{ תואם ל- } (\mathcal{F}_n)_n$$

$$(ג) \mathbb{E}(x_{n+1}|\mathcal{F}_n) = x_n \text{ a.s.}$$

אם יש $\leq$ במקום = זה יקרא סופר מרטינגל ואם יש $\geq$ במקום = זה יקרא סב מרטינגל.

דוגמא. הילוך מקרי פשוט. $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_0 = \{\psi, \Omega\}$, $x_0 = 0$, $S_n = x_1 + \dots + x_n$. $\sigma(x_1, \dots, x_n)$ מתקיים $S_n \in \mathcal{F}_n \Leftrightarrow x_1, \dots, x_n \in \mathcal{F}_n$ ו- $\mathbb{E}|S_n| < \infty$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(S_n + x_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \\ &= \mathbb{E}(S_n|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(x_{n+1}|\mathcal{F}_n) \stackrel{*}{=} S_n + \underbrace{\mathbb{E}x_{n+1}}_{=0} = S_n\end{aligned}$$

* בגלל ש- x_{n+1} ב"ת ב- $\mathcal{F}_n$.

תכונות:

קיים:

$$\mathbb{E}x_n = \mathbb{E}x_0$$

מדוע?

$$\mathbb{E}(x_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(x_n|\mathcal{F}_n)$$

לכן,

$$\mathbb{E}(x_{n+1} - x_n|\mathcal{F}_n) = 0$$

לכן,

$$\forall A \in \mathcal{F}_n \quad \int_A (x_{n+1} - x_n) d\mathbb{P} = 0$$

לכן,

$$\mathbb{E}x_{n+1} = \mathbb{E}x_n = \dots = \mathbb{E}x_0$$

H_n ניתן לחיזוי ביחס לפילטרציה אם $H_n \in \mathcal{F}_{n-1}$. אפשר לחשוב על H_n ככסף ההימור בצעד ה- n שתלוי בתוצאות ההימורים הקודמים בלבד.

טענה. $(M_n)_n$ פרטינגל, τ זמן עצירה אז גם $(M_{\tau \wedge n})_n$ גם פרטינגל.

טענה. אם x_n פרטינגל ו- H_n ניתן לחיזוי אז $(H \bullet x)_n = \sum_{m=1}^n H_m(x_m - x_{m-1})$ ו- $(H \bullet x)_0 = 0$ גם הוא פרטינגל.

תרגיל. ניסוח פיזיקלי: רשת של נגדרים.

ERUTCIP

כל נגד זה התנגדות 1. לפי חוק פיזיקלי: $\frac{V_{\text{נקודה}} - V_x}{1}$ שכינים של $\sum_x$ לכן $V_x = \frac{1}{4} \sum_x V_y$ שכן y של x .

ניסוח מתמטי:

$f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. $A = (0, 0)$, $B = (0, 1)$ נאמר ש- $ysim x$ אם y שכן של x ב- $\mathbb{Z}^2$ מתקיים:

$$f(x) = \frac{1}{4} \sum_{y \sim x} f(y)$$

עם תנאי קצה $f(A) = 0, f(B) = 1$.

1. האם קיים פתרון חסום $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ לבעיה?
2. האם קיימים פתרונות, לא בהכרח חסומים נוספים?
3. האם יש עוד פתרון חסום?

פתרון.

1. נגדיר (הילוך מקרי שהתחיל ב- x_0 הגיע ל- B לפני A) $f(x_0) = \mathbb{P}(A \text{ לפני } B)$