

הסתברות למתמטיקאים – תרגול 10

11.5.11

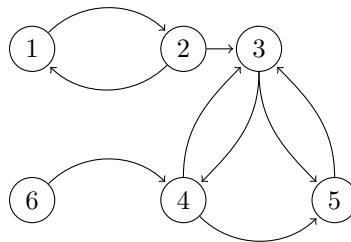
שרשראות מרקוב

יש תהליך ומשתנים מקריים $\{x_n\}$. מתקיים:

$$\mathbb{P}(x_{n+1} = i_{n+1} | x_n = i_n, \dots, x_0 = i_0) = \mathbb{P}(x_{n+1} = i_{n+1} | x_n = i_n)$$

כלומר ההסתברות תלויה רק במצב הנוכחי. גם הילוך מקרי היה שרשרת מרקוב (אבל אינסופית). אנחנו נסתכל על שרשראות מרקוב סופיות.
 V אוסף קודקודים עפ"י הגדרת שרשרת מרקוב. אפשר לתאר את התהליך בעזרת מטריצת מעברים: $P = p(x, y)$: לכל $x, y \in V$, $p(x, y) = \mathbb{P}(x_{n+1} = y | x_n = x)$.
 שרשרת אי פריקה (ארגדוית) אם $V, \emptyset$ הן הקבוצות הסגורות היחידות, כאשר $A \subseteq V$ סגורה אם $E \cap (A \times (V \setminus A)) = \emptyset$ כאשר E קבוצת כל הקשתות.
 תכונה זו שקולה לכך שיש מסלול מ- x ל- y לכל $x, y \in V$.
 שרשרת לא מחזורית: אם לכל $p \in \{2, 3, \dots\}$ יש לופ (מסלול סגור מנקודה לעצמה) שאורכו אינו מתחלק ב- p .
 $x \in V$ נקרא חולף אם יש $y \in V$ כך שיש מסלול מ- x ל- y אבל אין מסלול מ- y ל- x .
 אחרת, x נקרא נשנה. נאמר ש- x ו- y שקולים אם יש מסלול מ- x ל- y ומסלול מ- y ל- x .

דוגמא.

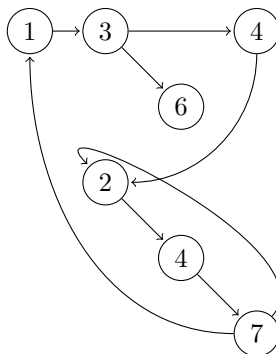


מחלקות שקילות: $\{1, 2\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{6\}$.
 אי פריקות – בבירור אין מסלול ל-6.
 אכן $\{3, 4, 5\}$ קבוצה סגורה.

דוגמא. מחזור 2:

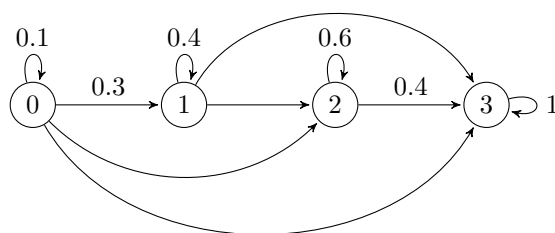


מחזור 3:



תרגיל. יהיו $\xi_1, \xi_2, \dots$ ב"ת ש"ה. נגדיר: $x_n = \max\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$. שרטטו שרשרת מרקוב מתאימה ואת מטריצת ההסתברויות.

פתרון.



$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כל שורה חייבת להסתכם ב-1.

תרגיל. בארץ גז מוג האויר לא משהו. אין יומיים ברציפות יום נחמד. אם יש יום גשום אז יש 50% שלמחרת יהיה גשום ו-25% שיהיה גשום. אם יש יום מושלג אז יש 50% שלמחרת יהיה מושלג ו-25% שיהיה מושלג. אם יש יום נחמד, 50% שלמחרת יהיה שלג ו-50% שלמחרת יהיה גשם.

בהינתן שהיום גשום, מה הסיכוי שמחרתיים יהיה נחמד?

פתרון. מטריצת ההסתברויות:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{גשום} \\ \text{נחמד} \\ \text{מושלג} \end{matrix}$$

$$\mathbb{P}(x_3 = \text{מושלג} | x_1 = \text{גשום}) = p_{13}^{(2)} = p_{11} \cdot p_{13} + p_{12} \cdot p_{23} + p_{13} \cdot p_{33}$$

זוה בדיוק:

$$p_{13}^{(2)} = (P^2)_{1,3}$$

ואפשר להוכיח באינדוקציה את הטענה הכללית.

טענה.

$$p_{ij}^{(n)} = (P^n)_{i,j}$$

משפט שראינו בכיתה בלי הוכחה.

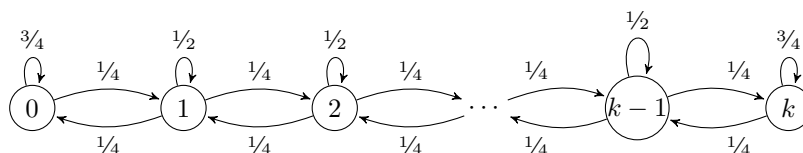
משפט. שרשרת מרקוב אי פריקה לא מחזורית המקיימת

$$\exists \lim_n \mathbb{P}(S_n = x) \quad \forall x \in V$$

הגדרה. התפלגות μ על V נקראת סטציונרית אם $\mu = \sum_{x \in V} \mu(x)p(x, y) \quad \forall y \in V$
 נחשוב על μ כוקטור שורה $\mu_0^T := (a_1, \dots, a_m)^T$ ואז ההתפלגות החדשה $\mu_1 = \mu_0^T P$
 סטציונרי זה אומר שאחרי שעשינו צעד, ההתפלגות נשארה אותו דבר, כלומר $\mu^T P = P \mu^T$
 נשים לב שעבור התפלגות סטציונרית μ מתקיים $\mu^T p^n = \underbrace{\mu^T p}_{\mu^T} p^{n-1} = \dots = \mu^T$

תרגיל. יש בחורה בעלת k זוגות נעלי ריצה. כל יום היא יוצאת לריצה באופן הבא:
 בהסתברות שווה היא יוצאת מהכניסה האחורית או מהכניסה האחורית וכן"ל חוזרת דרכן.
 בחזרה היא מורידה את הנעליים בכניסה במפתן הדלת המתאימה, כנ"ל ביציאה, אם יש זוג
 נעליים לוקחת ואחרת רצה יחפה.
 מהי פרופורציית הזמן שבו היא רצה יחפה?

פתרון. נסמן ב- x_n את מספר הזוגות במפתן הדלת הקדמית בזמן n (הריצה ה- n).



השרשרת אי פריקה, לא מחזורית. המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & & & \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & & \\ & 1/4 & 1/2 & 1/4 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

המטריצה סימטרית $u^T P = (Pu)^T$ ו"ע של P $(1, \dots, 1)$ לכן $u = (\frac{1}{k+1}, \dots, \frac{1}{k+1})$ וזאת
 התפלגות סטציונרית. לכן אם קיים הגבול זה יהיה הגבול. לכן $\frac{1}{k+1}$ מהזמן היא תרוץ יחפה.