

הסתברות למתמטיקאים – תרגול 1

07.03.11

הגדרה. מרחב הסתברות הוא שלשה $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ כאשר Ω קבוצת מצבי טבע, קבוצת תוצאות, $\mathcal{F}$ קבוצת אירועים אפשריים, σ -אלגברה, σ -שדה, ו- $\mathbb{P}$ מידת הסתברות מיחסת הסתברות לכל $A \in \mathcal{F}$.

הגדרה. $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$ תקרא σ -שדה אם:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$

2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \complement A \in \mathcal{F}$

3. $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{F}, \forall A_i \in \mathcal{F}$

הערה. נובע גם שסגור לחיתוך בן מניה של ארועים.

הערה. אם Ω קבוצה סופית בדר"כ ניקח $\mathcal{F} = 2^\Omega$.

הגדרה. מידת הסתברות $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ כאשר:

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

2. $\mathbb{P}(A) \geq \mathbb{P}(\emptyset) = 0$,

3. σ -אדיטיביות: $\mathbb{P}(\biguplus_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}(A_i)$

תרגיל. עבור מידת הסתברות $\mathbb{P}$ על $(\Omega, \mathcal{F})$ מתקיים,

1. מונוטוניות: $\mathbb{P}(B - A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \geq 0$ עבור $A \subseteq B$

2. סב-אדיטיביות $A \subseteq \bigcup A_i$ אז $\mathbb{P}(A) \leq \sum \mathbb{P}(A_i)$

3. רציפות מלמטה: $A_i \uparrow A$ אז $\mathbb{P}(A_i) \uparrow \mathbb{P}(A)$

4. רציפות מלמעלה: $A_i \downarrow A$ אז $\mathbb{P}(A_i) \downarrow \mathbb{P}(A)$

פתרון. 1. $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B - A \cup A) = \mathbb{P}(B - A) + \mathbb{P}(A)$ אז $B - A \in \mathcal{F}$ ו- $B - A = B \cap \complement A$

2. תרגיל.

3. נגדיר $\tilde{A}_1 = A_1, \tilde{A}_2 = A_2 \setminus A_1$ וכו'

אז $A = \biguplus \tilde{A}_i$ ומתקיים $\mathbb{P}(A) = \sum \mathbb{P}(\tilde{A}_i)$ אז מתקיים:

$$\sum_{i=1}^N \mathbb{P}(\tilde{A}_i) = \mathbb{P}(A_N)$$

ולכן $\mathbb{P}(A_N) \rightarrow \mathbb{P}(A)$

דוגמאות בסיסיות:

1. הטלת מטבע הוגן. $\Omega = \{0, 1\}$, $\mathcal{F} = 2^{\{0,1\}}$

$$\mathbb{P}(\{0\}) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{2}, P(\{0, 1\}) = 1$$

2. מידה אחידה על $(0, 1)$ $((0, 1), \mathcal{B}, \lambda)$ מתקיים $\lambda((a, b)) = b - a$ כאשר $\mathcal{B}$ קבוצת בורל, λ מידת לבג.

הגדרה. $A \subseteq 2^\Omega$ היא σ -אלגברה המינימלית המכילה את A (חיתוך כל השדות- σ המכילות את A). A נקראת קבוצה יוצרת של $\sigma(A)$.

דוגמא.

$$\mathcal{B} = \sigma(\text{קטעים פתוחים}) = \sigma(\text{קטעים סגורים}) = \sigma((-\infty, a]) = \sigma(\text{קטעים דיאדיים})$$

ב- $[0, 1]$ קטעים דיאדיים $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$.

שאלה. נניח שיש לנו מרחב מידה $(\Omega, \sigma(A))$ המצוייז בשתי מידות $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ ומתקיים

$$\mathbb{P}_1(B) = \mathbb{P}_2(B) \quad \forall B \in A$$

האם pr_1, pr_2 מזדהות על $\sigma(A)$?

תשובה. לא. באופן כללי אי אפשר לדעת אם $\mathbb{P}_1(B \cup C)$ מתוך $\mathbb{P}_1(B), \mathbb{P}_2(B)$.

מה בכל זאת אפשר להגיד?

משפט. Caratheodory

תהי $\mu_0 : A \rightarrow \mathbb{R}^+$ "מידת הסתברות" על אלגברה A אז μ_0 ניתנת להרחבה יחידה למידת הסתברות על $\sigma(A)$.

אלגברה: $\Omega \in A, B \in A \Rightarrow \mathbb{C}B \in A$ ואיחוד זר סופי של קבוצות מ- A ב- A .

מידת הסתברות: $\mu_0(\Omega) = 1$ ו- σ -אדיטיבית, אי שלילית

אם $B \in A$ ניתנת ע"י $A_i \in A, \sum_{i=1}^\infty A_i$ אז $\mu_0(B) = \sum_{i=1}^\infty \mu_0(A_i)$

דוגמא. איחוד סופי של קטעים (a, b) (או של דיאדיים, או של $(-\infty, a]$)

הגדרה. משתנה מקרי: עבור $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ פונקציה מדידה $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת משתנה מקרי. X מדידה פירושה $\forall B \in \mathcal{B} \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$

הערה. כדי לוודא מדידות מספיק לבדוק על קבוצה יוצרת A $\sigma(A) = \mathcal{B}$. מדוע? כי תמונה הופכית היא הפעולה הכי הטובה בעולם.

דוגמאות. $\lambda, \Omega = [0, 1]$ כל פונקציה רציפה; $X(\omega) = \omega^2, X(\omega) = \beta_k$ הספרה הקיית בייצוג הבינארי של ω .

פונקצית התפלגות מצטברת:
כל משתנה מקרי X משרה מידת הסתברות על $\mathbb{R}$:

$$\mu_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$$

פונקצית ההתפלגות:

$$F(x) = \mu_X(-\infty, x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \leq x\})$$

$$\mu_X([a, b]) = F(b) - F(a)$$

דוגמא. $\Omega = [0, 1], \lambda$

$$X_1(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \geq \frac{1}{2} \\ 0 & \omega < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$X(\omega) = \omega$$

שאלה. האם $F_{X_1} = F_{X_2}$ אז $X_1 = X_2$?

תשובה. לא. למשל

$$X_1(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \geq \frac{1}{2} \\ 0 & \omega < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$X_1(\omega) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \leq \omega < \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \leq \omega < \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} \leq \omega < 1 \end{cases}$$

הגדרה. X, Y נקראים שויי התפלגות (ש"ה) אם $F_X = F_Y$.

נשים לב: ממשפט קראתודור אם ל- X, Y אותה ההתפלגות הם משרים אותה מידת הסתברות על $\mathbb{R}$.
תכונות של F :

משפט. 1. מונוטוני עולה $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

$$3. \text{רציפות מימין: } \lim_{y \downarrow x} F(y) = F(x)$$

עבור פונקציה שמקיימת את התכונות הנ"ל קיים משתנה מקרי על $[0, 1], \mathcal{B}, \lambda$ כך ש-
 $F_X = F$

לפעמים קיימת פונקציה אי שלילית אינטגרלית f כך ש- $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$
כאשר F פונקצית התפלגות של X אז $f(x)$ תקרא פונקצית צפיפות הסתברות של X .

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & t \in (a, b) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{דוגמא. } X(\omega) \text{ מתפלג אחיד ב- } (a, b) \text{ אז}$$

כל פונקציה f אי שלילית אינטגרלית עם $\int_{-\infty}^{\infty} f = 1$ מגדירה התפלגות ע"י $F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$. לכן כזו f נקראת פונקציית צפיפות הסתברות. אי-תלות:

יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מ"ה ויהיו $X_1, \dots, X_N$ מ"מ. נאמר ש- $X_1, \dots, X_N$ הם בלתי תלויים אם $\mathbb{P}(X_1 \in I_1, \dots, X_N \in I_N) = \mathbb{P}(X_1 \in I_1) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(X_N \in I_N)$ לכל אוסף קטעים $I_1, \dots, I_N$. במקרה של סדרה אינסופית $X_1, \dots$ נאמר שהסדרה ב"ת אם לכל N $X_1, \dots, X_N$ הם בלתי תלויים.

תרגיל. תהי $X_1, X_2, \dots$ סדרת הטלות מטבע הוגן ב"ת. חשבו את ההסתברות שקיים רצף של N אחדות עוקבות. כלומר, $(*) \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\exists i, X_{i+1} = 1, X_{i+2} = 1, \dots, X_{i+N} = 1) = 1$

פתרון. נתבונן ב- $\mathbb{C}A$ ונבנה סדרה $A_i \downarrow \mathbb{C}A$ ונוכל לחשב לפי $\mathbb{P}(A_i) \rightarrow \mathbb{P}(A)$.
 "ב- N הטלות הראשונות לא יצא 1, ..., 1"
 $A_1 = "1, \dots, 1"$
 $\mathbb{P}(A_1) = 1 - \frac{1}{2^N}$
 "לא יצא רצף של N אחדות ב- $2N$ הטלות הראשונות"
 $A_2 = "$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_2) &= \mathbb{P} \left(\begin{array}{l} \text{אין } N \text{ אחדות רציפות מ-} X_1 \text{ עד } X_N \text{ וגם אין} \\ N \text{ אחדות מ-} X_2 \text{ עד } X_{N+1} \text{ וגם אין} \\ N \text{ אחדות מ-} X_{N+1} \text{ עד } X_{2N} \end{array} \right) \leq \\ &= \mathbb{P}(X_{2N} \text{ עד } X_{N+1} \text{ וגם אין } N \text{ אחדות מ-} X_1 \text{ עד } X_N) = \\ &= (1 - \frac{1}{2^N})(1 - \frac{1}{2^N}) = (1 - \frac{1}{2^N})^2 \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(A_n) \leq (1 - \frac{1}{2^N})^n \rightarrow 0 \text{ באותו אופן}$$

$$P(\mathbb{C}A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$$

ולכן,
 $\mathbb{P}(A) = 1$

$\Omega = \{-1, 1\}$ $X_1, \dots, X_N$ הטלות ב"ת של מטבע הוגן

הגדרה. $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ נקרא הילוך מקרי פשוט.

משפט. 1. עבור $n + k$ זוגי:

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{k^2}{2n}} (1 + \alpha_n(\frac{k}{\sqrt{n}}))$$

כאשר $\alpha_n(\cdot) \rightarrow 0$ יוניפורמית בכל קטע חסום.

2. זה מואבר לאפלט:

$$-\infty \leq a < b \leq \infty$$

$$\mathbb{P}(a \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq b) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

תרגיל. מצאו אסימפטוטיקה עבור

$$f(a, \alpha, n) = \mathbb{P}(a\sqrt{n} < S_n \leq a\sqrt{n} - 2n^\alpha)$$

כלומר $f(a, \alpha, n)$ אסימפטוטיקה ל- $F()$ אם $\frac{F(a, \alpha, n)}{f(a, \alpha, n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$ כאשר הפונקציה f מפורשת.

$$1. \alpha = 0$$

$$2. 0 < \alpha < \frac{1}{2}$$

$$3. \alpha = \frac{1}{2}$$

$$4. \frac{1}{2} < \alpha$$

פתרון. 1. להעריך את הסיכוי ש $S_n \in [a\sqrt{n}, a\sqrt{n} + 2]$ כלומר $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \in [a, a + \frac{2}{\sqrt{n}}]$ נשים לב: בקטע $[a, a + \frac{2}{\sqrt{n}}]$ יש בדיוק נקודה אחת $\frac{k}{\sqrt{n}}$ כל של k -ול- n אותה זוגיות. אז נבדוק במקרה ש- $n \rightarrow \infty$ על הזוגיים.

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \in [a, a + \frac{2}{\sqrt{n}}]\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{k}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{k^2}{2n}} (1 + \alpha_n(\frac{k}{\sqrt{n}}))\right)$$

$$\gamma_n(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \text{ נסמן,}$$

טענה.

$$\frac{\gamma_n(a)}{\gamma_n(\frac{k}{\sqrt{n}})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

k תלוי ב- n .

הוכחה.

$$\lim \frac{\gamma_n(a)}{\gamma_n(\frac{k}{\sqrt{n}})} = \lim e^{\underbrace{-\frac{1}{2}(a^2 - \frac{k^2}{2n})}_{\text{קטן כרצוננו}}} \rightarrow 1$$

□

לכן אפשר לבחור את $f(a, \alpha, n) = \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{a^2}{2}}$

2. באינטרוול באורך $\frac{2}{\sqrt{n}} n^\alpha$ יש בערך n^α נקודות מהצורה $\frac{k}{\sqrt{n}}$ מתאימות. והצפיפות ההסתברות בכל אחת מהן היא בערך $\frac{2}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{a^2}{2}}$. כלומר מספיק ש-

$$\frac{\mathbb{P}(\frac{a}{\sqrt{n}} \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{a}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}})}{\mathbb{P}(\frac{a}{\sqrt{n}} \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{a}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}})} \rightarrow 1$$

ונקבל שאסימפטוטיקה אפשרית היא $f = n^\alpha \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{a^2}{2}}$

3. $\alpha = \frac{1}{2}$ נעריך את ההסתברות ש- $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \in [a, a + \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}] = [a, a + 2]$ וזה בדיוק המקרה שהוכחנו בשיעור

$$\mathbb{P}(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \in [a, a + 2]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int_a^{a+2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

4. $\frac{1}{2} < \alpha$ מעריכים את $\mathbb{P}(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \in [a, a + 2n^{\alpha-\frac{1}{2}}])$ אבל לכל $a \leq b$ נתון ניתן למצוא n מספיק גדול כך ש- $[a, b] \subseteq [a, a + 2n^{\alpha-\frac{1}{2}}]$ ולכן אסימפטוטיקה $f(a, \alpha, n)$ מתקיים $f(a, \alpha, n) =$ כן בגבול נבחר $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} \leq f(a, \alpha, n) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}$
 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}$