

הסתברות למתמטיקאים – הרצאה 9

28.03.11

עדיין מוכיחים את משפט הגבול המרכזי.
ונותר רק לראות מה קורה עם

$$\int_{|x| > n^{1/12}} \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^2 \|f''\| \mu(dx)$$

$$\int_{|x| > n^{1/12}} \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^2 \|f''\| \mu(dx) = \frac{1}{n} \|f''\| \cdot \int_{|x| > n^{1/12}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ממשפט ההתכנסות הדומיננטית ע"י

$$\int x^2 \mu(dx) = 1$$

אז יש לנו אי-שוויון:

$$\left| \int f d\mu_n - \int f d\nu_n \right| \leq \frac{\varepsilon_n}{n} (\|f''\| + \|f'''\|)$$

נוכל לרשום גם:

$$|(\mu_n * f)(0) - (\nu_n * f)(0)| \leq \frac{\varepsilon_n}{n} (\|f''\| + \|f'''\|)$$

ואז

$$\|\mu_n * f - \nu_n * f\| \leq \frac{\varepsilon_n}{n} (\|f''\| + \|f'''\|)$$

נוכיח עכשיו ש-

$$\|\mu_n^{*n} * f - \nu_n^{*n} * f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

נעבור בהדרגה:

$$\mu * \mu * \mu * \mu * f$$

$$\mu * \mu * \mu * \nu * f$$

$$\mu * \mu * \nu * \nu * f$$

$$\mu * \nu * \nu * \nu * f$$

$$\nu * \nu * \nu * \nu f$$

בכל מעבר כזה:

$$\mu_n^{*n} * f - \nu_n^{*n} * f = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_n^{*(n-k-1)} * (\mu_n - \nu_n) * \nu^k * f$$

אז:

$$\|\mu_n^{*n} * f - \nu_n^{*n} * f\| = \sum_{k=0}^{n-1} \|\mu_n^{*(n-k-1)} * (\mu_n - \nu_n) * \underbrace{\nu^k * f}_{f_k}\|$$

ואז

$$\|f_k\| \leq \|f\| \quad \|f'_k\| \leq \|f'\| \quad \|f''_k\| \leq \|f''\| \quad \|f'''_k\| \leq \|f'''\|$$

כי קיפול עם מידת הסתברות לא משנה את הנורמה. כעת

$$\|(\mu_n - \nu_n) * \underbrace{\nu^k * f}_{f_k \leq \frac{\varepsilon}{n}}(\|f''\| + \|f'''\|)\|$$

בפרט אם נקפל עם מידת הסתברות:

$$\|\mu_n^{*(n-k-1)}(\mu_n - \nu_n) * \underbrace{\nu^k * f}_{f_k \leq \frac{\varepsilon}{n}}(\|f''\| + \|f'''\|)\|$$

ואז שואף ל-0.

תוצאה. $\xi \sim N(0, 1)$

$$\mathbb{E}f\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}f(\xi)$$

נותר לנו רק לקרב פונקציה אופיינית ע"י פונקציות רציפות:

למה. קיימת $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$. $\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi'''$ רציפות וחסומות.
ג- $\varphi(x) = 1$ $x \in [0, \infty)$, $\varphi(x) = 0$ $x \in (-\infty, -1]$

הוכחה. $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{\mathbb{E}\varphi\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} - a\right)\right)}_{\leq \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \geq a\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\varphi\left(\frac{1}{\varepsilon}(\xi - a)\right)$$

נרצה להגיד ש-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \geq a\right) \leq \mathbb{E}\varphi\left(\frac{1}{\varepsilon}(\xi - a)\right)$$

אבל אף אחד לא מבטיח בכלל קיום גבול. נו טוב אז נגיד:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \geq a\right) \leq \underbrace{\mathbb{E}\varphi\left(\frac{1}{\varepsilon}(\xi - a)\right)}_{\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}(\xi \geq a)}$$

זה לא משפט ההתכנסות החסומה ו- $\mathbb{P}(\xi \geq a)$ זה תוחלת של אינדיקטור. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \geq a\right) \leq \mathbb{P}(xi \geq a)$ אז: ואז נכתוב:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} < a\right) \geq \mathbb{P}(\xi < a)$$

באותו אופן נוכל להתבונן במ"מ $-X_1, -X_2, \dots$. גם אלה מקיימים את כל ההנחות ולכן: $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{-X_1 - \dots - X_n}{\sqrt{n}} \geq a\right) \leq \mathbb{P}(xi \geq a)$ במילים אחרות:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \leq -a\right) \leq \mathbb{P}(xi \geq a)$$

זה נכון גם ל- $-a$:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \leq a\right) \leq \mathbb{P}(xi \geq -a) = \mathbb{P}(\xi \leq a)$$

כעת,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi < a) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} < a\right) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} < a\right) \leq \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \leq a\right) \leq \mathbb{P}(\xi \leq a) \end{aligned}$$

אבל בהתפלגות נורמלית אין אטומים לכן:

$$\mathbb{P}(\xi < a) = \mathbb{P}(\xi \leq a)$$

לכן יש שוויונות בכל מקום ואז גבול עליון שווה לגבול תחתון ולכן הגבול קיים כמו שרצינו. $\square$

ספרות אינסופיות בלתי תלויות

יהיו $A_1, A_2, \dots$ מאורעות ב"ת, $\mathbb{P}(A_n) = p_n$.
 נסמן: $S_n = \mathbb{1}_{A_1} + \dots + \mathbb{1}_{A_n}$. זה מ"מ $S_n : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$.
 נכתוב $S_n \uparrow S$ ואז $S : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$.
 הלמה הראשונה של בורל קנטלי:

$$\sum p_n < \infty \Rightarrow S < \infty \text{ כמעט בכל מקום}$$

הוכחה. יהי $M \in (0, \infty)$.

$$\mathbb{P}(S > M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n > M)$$

מי שנראה לו ברור מאליו, צריך להזהר קצת, כי לדוגמא $\mathbb{P}(S \geq M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n \geq M)$ (כבר לא נכון).
 זה נכון כי $\{\omega : S(\omega) > M\} = \{\omega : \exists n S_n(\omega) > M\}$.
 מאי-שוויון מרקוב:

$$\mathbb{P}(S_n > M) \leq \frac{\mathbb{E}S_n}{M} = \frac{p_1 + \dots + p_n}{M} \leq \frac{1}{M} \sum_{n=1}^{\infty} p_n$$

בביטוי ימני אין n . מי שחושב שיש שם n כנראה לא מתמטיקאי.
 אבל בגלל ש- $\mathbb{P}(S_n > M) \uparrow \mathbb{P}(S > M)$ נקבל:

$$\mathbb{P}(S > M) \leq \frac{1}{M} \underbrace{\sum p_n}_{< \infty} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0$$

לכן,

$$\mathbb{P}(S = \infty) = 0$$

□

ובכלל לא השתמשנו באי תלות.
 הלמה השנייה של בורל קנטלי: אם A_k ב"ת:

$$\sum p_n = \infty \Rightarrow S = \infty \text{ כמעט בטוח}$$

כאן לא מספיק להוכיח $\mathbb{E}S = \infty$ זה חלק מדי.

הוכחה. נרצה להראות ש- $\mathbb{P}(S \leq M)$ קטנה. יהי $M \in (0, \infty)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S \leq M) &\leq \Pr(e^{-S} \geq e^{-M}) \leq \frac{\mathbb{E}e^{-S}}{e^{-M}} \leq \underbrace{e^M \mathbb{E}e^{-S_n}}_{\forall n} = \\ &= e^M \mathbb{E}e^{-\mathbf{1}_{A_1} - \dots - \mathbf{1}_{A_n}} = e^M \mathbb{E}e^{-\mathbf{1}_{A_1}} \dots e^{-\mathbf{1}_{A_n}} = \\ &= e^M (\mathbb{E}e^{-\mathbf{1}_{A_1}}) \cdot (\mathbb{E}e^{-\mathbf{1}_{A_n}}) = \\ &= e^M (p_1 e^{-1} + (1 - p_1) \cdot 1) \dots (p_n e^{-1} + (1 - p_n) \cdot 1) = \\ &= e^M (1 - (1 - \frac{1}{e})p_1) \cdot \dots \cdot (1 - (1 - \frac{1}{e})p_n)\end{aligned}$$

$$1 - \alpha \leq e^{-\alpha}$$

לכן,

$$\begin{aligned}e^M (1 - (1 - \frac{1}{e})p_1) \cdot \dots \cdot (1 - (1 - \frac{1}{e})p_n) &\leq \\ &\leq e^M e^{-(1 - \frac{1}{e})p_1} \dots e^{-(1 - \frac{1}{e})p_n} \leq \exp(M - (1 - \frac{1}{e})(p_1 + \dots + p_n))\end{aligned}$$

כלומר:

$$\mathbb{P}(S \leq M) \leq \exp(M - (1 - \frac{1}{e}) \underbrace{(p_1 + \dots + p_n)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

לכן,

$$\forall M \mathbb{P}(S \leq M) = 0$$

$$\mathbb{P}(S < \infty) = 0$$

כלומר

$$\mathbb{P}(S = \infty) = 1$$

□

כעת, אם U_n מ"מ ב"ת ש"ה $U_n \sim U(-1, 1)$ אז $\{nU_n\}_{n=1}^\infty$ סדרה צפופה כ"ב אך $\{n^2 U_n\}_{n=1}^\infty$ לא צפופה כ"ב. ואכן, $a < b$:

$$\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(a \leq nU_n \leq b) = \infty$$

עבור n מספיק גדול (למשל שמכיל את הקטע $[a, b]$) ההסתברות $\mathbb{P}(a \leq nU_n \leq b) \sim \frac{b-a}{2n}$.
 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{[a,b]}(nU_n) = \infty$ כ"ב לכן עפ"י הלמה של בורל קנטלי. כלומר:

$$\forall a, b [a < b] \mathbb{P}(\sum \mathbb{1}_{[a,b]}(nU_n) = \infty) = 1$$

אם ניקח $a, b \in \mathbb{Q}$. אבל עכשיו

$$\mathbb{P}(\forall a, b \in \mathbb{Q} [a < b] \sum \mathbb{1}_{[a,b]}(nU_n) = \infty) = 1$$

לכן כ"ב בכל קטע רציונלי יש אינסוף איברי סדרה. לכן סיימנו.
 מה לגבי הסדרה השנייה?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(a \leq n^2 U_n \leq b) < \infty$$

עבור n מספיק גדול (למשל שמכיל את הקטע $[a, b]$) ההסתברות $\mathbb{P}(a \leq n^2 U_n \leq b) \sim \frac{b-a}{2n^2}$.
 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{[a,b]}(n^2 U_n) < \infty$ כ"ב לכן עפ"י הלמה של בורל קנטלי.
 כעת מספיק להתבונן בקטעים $[-K, K]$:

$$\forall K \mathbb{P}(\sum \mathbb{1}_{[-K,K]}(n^2 U_n) = \infty) = 1$$

$$\mathbb{P}(\forall K \sum \mathbb{1}_{[-K,K]}(n^2 U_n) = \infty) = 1$$

לכן $\mathbb{P}(|n^2 U_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty) = 1$.
 נעבור לחוק החזק של המספרים הגדולים במקרה הפרטי של הטלת מטבע.
 הטענה היא ש- $S_n = X_1 + \dots + X_n$ סימנים מקריים.

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{כ"ב}} 0$$

באופן כללי יותר: $S_n = X_1 + \dots + X_n$ מ"מ ב"ת ש"ה. נצטרך לדרוש גם $\mathbb{E}X_1^4 < \infty$.

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{כ"ב}} \mathbb{E}X_1$$

הוכחה. מספיק להוכיח:

$$\mathbb{E}((\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}X_1)^4) = O(\frac{1}{n^2})$$

אין כאן משחק בין המומנט הרביעי לריבוע במכנה. המומנט הוא שרירותי כדי שיהיה נוח להוכיח והריבוע כדי שזה יתכנס.
 מדוע זה מספיק?
 כי אז הסכום הבא מתכנס:

$$\sum_n \mathbb{E}(\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}X_1)^4 < \infty$$

אז

$$\mathbb{E} \sum_n (\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}X_1)^4 < \infty$$

מזה אנחנו נסיק ש-

$$\sum_n (\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}X_1)^4 < \infty \text{ כ"ב}$$

כעת,

$$(\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}X_1)^4 \rightarrow 0 \text{ כ"ב}$$

לבסוף,

$$\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}X_1 \rightarrow 0$$

אז זה באמת מספיק.

נגדיר: $Y_n = X_n - \mathbb{E}X_n$ מ"מ ב"ת כך ש- $\mathbb{E}Y = 0$ ואז

$$\mathbb{E}((\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}X_1)^4) = \mathbb{E}(\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n})^4$$

כלומר רוצים ש-

$$\mathbb{E}(\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n})^4 = O(\frac{1}{n^2})$$

כלומר רוצים ש-

$$\mathbb{E}(Y_1 + \dots + Y_n)^4 = O(n^2)$$

$$\mathbb{E}(Y_1 + \dots + Y_n)^4 = \underbrace{\mathbb{E}(Y_1^4 + \dots + Y_n^4)}_{O(n)} + 6 \underbrace{\sum_{k < l} \mathbb{E}(Y_k^2 Y_l^2)}_{\frac{n(n-1)}{2} (\mathbb{E}Y_1^2)^2} = O(n^2)$$

□