

הסתברות למתמטיקאים – הרצאה 8

23.03.11

נוכיח את הלמה הבאה:

למה. אם f, f' רציפות וחסומות אז $(\mu * f)' = \mu * f'$, רציפה וחסומה ו- $(\mu * f)' = \mu * f'$.

הוכחה. כדי להוכיח כדאי קודם לשתחרר מהנגזרת.

$g (= f')$ היא פונקציה רציפה וחסומה כזאת ש- $\int_a^b g(x)dx = f(b) - f(a)$ לכל a, b . בניסוח הזה אין מילה נגזרת אלא יש מילה אינטגרל. ועם אינטגרלים אנחנו מרגישים בנוח כי יש לנו משפט פוביני.

מה צריך להוכיח בניסוח כזה? נוכיח ש- $\int_a^b (\mu * g)(x)dx = (\mu * f)(b) - (\mu * f)(a)$ לכל a, b , זה יספיק לנו (בעזרת הלמה הקודמת).

$$(\mu * f)(a) - (\mu * g)(b) = \int f(b+x)\mu(dx) - \int f(a+x)\mu(dx)$$

$$\begin{aligned} \int_a^b (\mu * g)(x)dx &= \int_a^b dx \int g(x+y)\mu(dy) \stackrel{\text{פוביני}}{=} \\ &= \int \mu(dy) \int_a^b dx g(x+y) = \int \mu(dy) (f(b+y) - f(a+y)) \end{aligned}$$

□

וזה אותו הדבר.

אם נפעיל את הלמה פעמיים נקבל לנגזרת השנייה. אם נפעיל שלוש פעמים נקבל לנגזרת השלישית. באופן כללי אפשר להפעיל כמה פעמים שנרצה אבל מספיק לנו לנגזרת שלישית. כעת, נתבונן בזוג התפלגויות μ, ν ב- $\mathbb{R}$ כך ש- $\int x\mu(dx) = 0, \int x^2\mu(dx) = 1$ וכן $\int x\nu(dx) = 0, \int x^2\nu(dx) = 1$ (כלומר התוחלת היא 0 והשונות היא 1). כעת נניח f, f', f'', f''' רציפות וחסומות ב- $\mathbb{R}$.

נתבונן במ"מ $X_1, \dots, X_n$ ב"ת מתפלגים μ ו- $Y_1, \dots, Y_n$ מ"מ ב"ת מתפלגים ν .

טענה. בתנאים הנ"ל

$$\mathbb{E}f\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}\right) - \mathbb{E}f\left(\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

בפועל זה כמובן טענה כללית אבל ניסחנו אותה בשפה ההסתברותית. ההוכחה לא מיידית ונצטרך קודם כמה למות. אבל ראשית:

תוצאה.

$$\mathbb{E}f\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-u^2/2} du$$

הוכחה. ניקח $\nu = N(0, 1)$ אז $Y \sim N(0, 1)$ לכן $\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ כי קומבינציה לינארית של מ"מ מתפלגים נורמלית. כלומר בחירה כזאת של ν ואז נקבל את השוויון (שבכלל לא תלוי ב- n):

$$\mathbb{E}f\left(\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-u^2/2} du$$

□

ראשית נטען:

$$\int (a + bx + cx^2) \mu(dx) = \int (a + bx + cx^2) \nu(dx)$$

ואכן, דרשנו ששתייהן מידות הסתברות לכן $a = a$, שתייהן בעלות תוחלת אפס ולכן $b = b$ ולבסוף השונויות של שתייהן 1 לכן $c = c$. כעת, נגדיר $\frac{X_1}{\sqrt{n}} \sim \mu_n$. באופן פורמלי יותר:

$$\int f d\mu_n = \mathbb{E}f\left(\frac{X_1}{\sqrt{n}}\right) = \int f\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \mu(dx)$$

לכן נוכל להסיק:

$$\int (a + bx + cx^2) \mu_n(dx) = \int (a + bx + cx^2) \nu_n(dx)$$

כי נציב במקום x את $\frac{x}{\sqrt{n}}$. טוב, מה לנו מהמידות μ_n ? מה שקורה זה:

$$\mathbb{E}f\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}\right) = \mathbb{E}f\left(0 + \frac{X_1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{X_n}{\sqrt{n}}\right) = (\mu_n * \mu_n * \dots * \mu_n * f)(0)$$

ועכשיו גם הקיפול היה שימושי. נסמן:

$$(\mu_n^{*n} * f)(0) := (\mu_n * \mu_n * \dots * \mu_n * f)(0)$$

האסטרטגיה שלנו היא להראות $\mu_n^{*n} \approx \nu_n^{*n}$. אנחנו עדיין מדברים על ה- f מניסוח הטענה.

למה. קיימים $\varepsilon_n \rightarrow 0$ (תלויים ב- μ, ν אך ל- f), כך ש-

$$\left| \int f d\mu_n - \int f d\nu_n \right| \leq \frac{\varepsilon_n}{n} (\|f''\| + \|f'''\|)$$

כאשר $\|f\| = \sup_{\mathbb{R}} |f(\cdot)|$

למה זה טוב? זה אומר במובן מסויים שההבדל בין μ_n ל- ν_n קטן מ- $\frac{1}{n}$.

הערה. אם $\mathbb{E}|X_1|^3 = \int |x|^3 \mu(dx) < \infty$ ו- $\mathbb{E}|Y_1|^3 < \infty = \int |x|^3 \nu(dx)$ כלומר קיום המומנט השלישי, אז נוכל לקבל אפילו משהו חזק יותר

$$|\int f d\mu_n - \int f d\nu_n| \leq \frac{1}{6n^{1.5}} \|f'''\| (\mathbb{E}|X_1|^3 + \mathbb{E}|Y_1|^3)$$

כאן רואים באיזו מהירות ε_n שואף ל-0.

של הלמה. נתחיל עם נוסחאת טיילור. נגדיר $g(x)$ באופן הבא:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + g(x)$$

g רציפה כמובן, אבל היא לא חסומה (מפני שהפרש בין פונקציה חסומה לפולינום שבדר"כ לא חסום) אבל מנסוחאת טיילור:

$$|g(x)| \leq \frac{1}{6}|x|^3 \|f'''\|$$

כעת,

$$\int (f - g) d\mu_n = \int (f - g) d\nu_n$$

מדוע? כי ההפרש הוא פרבולה, פולינום ממעלה 2. לכן,

$$\int f d\mu_n - \int f d\nu_n = \int g d\mu_n - \int g d\nu_n$$

ואז,

$$|\int f d\mu_n - \int f d\nu_n| \leq |\int g d\mu_n| + |\int g d\nu_n|$$

נשים לב שהמידות μ_n, ν_n מתרכזות בעיקר סביב האפס. נחזור רגע להערה (כלומר נניח שהמומנט השלישי חסום):

$$|\int g d\mu_n| \leq \int \frac{1}{6}|x|^3 \|f'''\| \mu_n(dx) = \frac{1}{6} \int \left|\frac{x}{\sqrt{n}}\right|^3 \mu(dx) = \frac{1}{6n^{1.5}} \mathbb{E}|X_1|^3$$

ובאותו אופן,

$$|\int g d\nu_n| \leq \frac{1}{6n^{1.5}} \mathbb{E}|X_1|^3$$

אז הוכחנו את ההערה. הבעיה עכשיו שלא דווקא המומנט השלישי חסום. הבעיה שלנו עכשיו זה שהזנב מאוד גדול כששואפים לאינסוף כי $|x|^3$. אולי נוכל להפחית את החזקה?

$$\left|\frac{1}{2}f''(0)x^2 + g(x)\right| \leq \frac{1}{2}x^2 \|f''\|$$

$$|g(x)| \leq x^2 \|f''\|$$

קיבלנו שני חסמים מלעיל לפונקציה g . אחד עדיף ל- x קטן ושני עדיף ל- x גדול. אז נפצל את האינטגרל:

$$\begin{aligned} \left| \int g d\mu_n \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \mu(dx) \right| = \\ &= \left| \int_{|x| \leq n^{1/12}} g\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \mu(dx) + \int_{|x| > n^{1/12}} g\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \mu(dx) \right| \leq \\ &\leq \int_{|x| \leq n^{1/12}} \frac{1}{6} \left| \frac{x}{\sqrt{n}} \right|^3 \|f'''\| \mu(dx) + \int_{|x| > n^{1/12}} \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right)^2 \|f''\| \mu(dx) \end{aligned}$$

מדוע $1/12$? כי צריכים משהו בין 0 ל- $1/6$. אבל:

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq n^{1/12}} \frac{1}{6} \left| \frac{x}{\sqrt{n}} \right|^3 \|f'''\| \mu(dx) &= o\left(\frac{1}{n}\right) \\ \text{כי } \left(\frac{n^{1/12}}{\sqrt{n}}\right)^3 &= n^{1/4-3/2} = n^{-1.25} = o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

ונוותר רק להראות שגם

$$\int_{|x| > n^{1/12}} \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right)^2 \|f''\| \mu(dx) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

□