

הסתברות למתמטיקאים – הרצאה 22

1.6.11

בשבוע שעבר הוכחנו למה שאומרת שאם $\mathcal{F}_n \uparrow \mathcal{F}_\infty$ אז $L_2(\mathcal{F}_n) \uparrow L_2(\mathcal{F}_\infty)$.
מזה נובע שאם $X \in L_2(\mathcal{F}_\infty)$ אז $X \xrightarrow{L_2} \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$. למה? קיימת סדרה $X_n \in L_2(\mathcal{F}_n)$ כזו ש- $\|X - X_n\|_{L_2} \rightarrow 0$. אבל התוחלת המתנית היא קירוב אופטימלי לכן

$$\|X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)\| \leq \|X - X_n\| \rightarrow 0$$

ואם $X \in L_2(\mathcal{F})$ אמנם זה לא ייתכנס ל- X אבל $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) \xrightarrow{L_2} \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\infty)$ כי $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) \xrightarrow{L_2} \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\infty)$ ולכן $X_\infty = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\infty)$.
נוסיף. אם $A \in \mathcal{F}_\infty$ נוכל לקחת $X = \mathbb{1}_A$. בטח ב- L_2 כי אפילו חסום.

$$\mathbb{P}(A|\mathcal{F}_n) \xrightarrow{L_2} \mathbb{1}_A$$

$$\mathbb{P}(A|\mathcal{F}_n) \xrightarrow{L_2} \mathbb{P}(A|\mathcal{F}_\infty)$$

אבל אלה מרטינגלים לכן יש התכנסות לא רק ב- L_2 בכל אחד מהמקרים אלא גם כ"ב. אם $X \in L_1(\mathcal{F}_\infty)$ נקבל $X \xrightarrow{L_1} \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$ ואם $x \in L_1(\mathcal{F})$ אז $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) \xrightarrow{L_1} \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\infty)$.
איך נראה התכנסות כ"ב? נחלק את ה- X לחלק חיובי וחלק שלילי ואז נקבל התכנסות כ"ב.

מידות מותנות

נניח יש לנו $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}$.

$$\mathbb{P}(A|\mathcal{F}_1)\mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_1) \quad \text{כ"ב}$$

ומפה למשל $\mathbb{P}(A|\mathcal{F}_1) \geq 0$ כ"ב, $\mathbb{P}(A_1 \uplus A_2 \uplus \dots | \mathcal{F}_1) = \mathbb{P}(A_1|\mathcal{F}_1) + \mathbb{P}(A_2|\mathcal{F}_1) + \dots$.
זה משום שהאינדקטור פה הוא סכום אינדקטורים ותוחלת היא אופרטור ליניארי.

$$\forall B \in \mathcal{F}_1 \quad \mathbb{P}(B|\mathcal{F}_1) = \mathbb{1}_B$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{P}(A|\mathcal{F}_1)) = \mathbb{P}(A)$$

האם כל זה מביא למידות מותנות? נחזור זמנית לעולם בדיד: Ω סופית או בת מניה. נניח שאין קבוצות זניחות ב- Ω (חוץ מ- $\emptyset$) כי כאן אין הבדל בין איחוד סופי של קבוצות ואיחוד בן מניה של קבוצות ולכן איחוד של כל קבוצות זניחות (בן מניה) הוא קבוצה זניחה ולכן אפשר פשוט לזרוק אותה. באופן שקול, יש לכל היותר קבוצה בת מניה של $\omega \in \Omega$ כך ש- $p(\omega) = 0$ ולכן אפשר לזרוק אותם. אם ככה, אין הבדל בין מחלקת שקילות לבין פונקציה (כי אין קבוצות זניחות). נגדיר

$$P_\omega(A) = \mathbb{P}(A|\mathcal{F}_1)(\omega)$$

$$P_\omega(A) \geq 0$$

$$P_\omega(A_1 \uplus A_2 \uplus \dots) = P_\omega(A_1) + P_\omega(A_2) + \dots$$

$$P_\omega(\Omega) = 1$$

לכן זאת מידת הסתברות ב- $(\Omega, \mathcal{F})$. עוד,

$$B \in \mathcal{F}_1 \Rightarrow P_\omega(B) = \begin{cases} 1, & \omega \in B \\ 0, & \omega \notin B \end{cases}$$

-1

$$\forall A \quad \sum_{\omega \in \Omega} P_\omega(A) p(\omega) = \mathbb{P}(A)$$

לכן

$$\sum_{\omega} p(\omega) P_\omega = P$$

היינו רוצים שכל זה יתקיים גם עבור הסתברות רציפה. שם אנחנו עובדים עם מחלקות שקילות כי לא נוכל לזרוק קבוצות זניחות.

הגדרה. הסתברות מותנית רגולרית היא משפחה של מידות $(P_\omega)_{\omega \in \Omega}$, P_ω מידת הסתברות ב- $(\Omega, \mathcal{F})$ כך שלכל $A \in \mathcal{F}$ הפונקציה $\omega \mapsto P_\omega(A)$ שייכת למחלקת שקילות $\mathbb{P}(A|\mathcal{F}_1)$.

משפט. אם $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, P מידה שרירותי, $\mathcal{F}_1$ גם שרירותי, אז הסתברות מותנית רגולרית קיימת ויחידה (עד כדי קבוצה זניחה).

דוגמא. למקרה שלא קיימת הסתברות מותנית רגולרית. ניקח $Z \subseteq [0, 1]$ כזאת ש- $m_* Z = 0$, $m^* Z = 1$, כלומר קבוצה לא מדידה לגמרי. אבל לא נסביר איך מוצאים כזאת. $\mathcal{F} = \{(A \cap Z) \cup (B \setminus Z) : A, B \in \mathcal{B}\}$, $\Omega = [0, 1]$, $P((A \cap Z) \cup (B \setminus Z)) = 0.5 \text{ mes } A + 0.5 \text{ mes } B$.

$$\mathbb{P}(Z|\mathcal{F}_1) = ?$$

בכל מקרה היא מדידה ביחס ל- $\mathcal{F}_1$.
 נניח $(P_x)_{x \in [0,1]}$ מידת הסתברות רגולרית. ניקח a, b רציונליים.

$$P_x([a, b]) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$

עבור כמעט כל x לפי מידת לבג. ואז $P_x = \delta_x$ אטום. אז $P_x(Z) = \mathbb{1}_Z(x)$ חוץ מקבוצה זניחה של x . ואז זה לא מסתדר.