הסתברות למתמטיקאים – הרצאה 2

23.02.11

רעיון: כאשר נתונה סדרה של מאורעות אז השכיחות שואפת להסתברות.

הגדרה. יהי X משתנה מקרי. נסמן $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$. זה נקרא פונקצית הצטברות של מ"מ X.

הרבה פעמים בחיים אין לנו התפלגות אמיתית אלה מדגם שממנו נרצה "לנחש" את התתפלגות, לבנות פונקציית התפלגות אמפירית. כאן בדיוק נוכל להשתמש בפונקציית ההצטברות.

משפט. יהיו $X_1, X_2, \ldots,$ מ"מ ב"ת ש"ה. נגדיר

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\underbrace{(-\infty, t]}_{\text{כמה יהיו משמאל}}}(X_k)$$

(האם זה חדש? לא. זאת פונקציית התפלגות אמפירית).
אז לכל $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}(\sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| \leq \varepsilon) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$$

זהו משפט גליוונקו־קנטלי בצורתו החלשה. למעשה הכללה למשתנים מקריים משהו שידענו כבר עבור מאורעות.

משפט הגבול המרכזי

משפט. משפט הגבול המרכזי יהיו $X_1, X_2, \ldots$ מ"מ ב"ת ש"ה וגניח $\mathbb{E}X_1 = 0$ (ברור שהוא אינטגרבילי, ומהנחת שוויון ההתפלגות נסיק שלכל n מתקיים $\mathbb{E}X_n = 0$). גניח גם $\mathbb{E}X_1^2 = 1$ (כלופר שהשונות היא 1).
נגדיר

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n$$

אז לכל $-\infty \leq a < b \leq \infty$:

$$\mathbb{P}\left(a\sqrt{n} < S_n < b\sqrt{n}\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{u^2}{2}}$$

מה הרעיון? אם ניקח כיסא (כיסא כלשהו) ונעטוף אותו במספיק נייר נקבל משהו שדומה לכדור. כאן אותו דבר, כל התפלגות תתחיל להראות כמו פעמון גאוס אם נלך מספיק קרוב לאינסוף.
משפט דה־מואבר לפלאס הוא מקרה פרטי.
משפט הגבול המרכזי – האם הגבול מרכזי או המשפט מרכזי? שניהם. הגבול מרכזי כי רחוק מהמרכז בסטיות גדולות זה לא טוב. מצד שני זה משפט מרכזי בתורת ההסתברות.
ההסיטוריה של המשפט:
1733 – de Moivre נתן נוסחאת סטירלינג

$$n! = \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}(1+o(1))$$

אז למה בכלל זה נקרא קירוב סטירלניג? כי דה־מואבר אמר שזה קבוע c ולא $\sqrt{2\pi}$.
1812 – Laplace נתן העתקה $\lambda \mapsto \mathbb{E}e^{i\lambda x}$ ואמר משהו על המשפט.
1830∼ – Poisson מצא דוגמא נגדית למה ש– Laplace אמר – התפלגות קושי שסכומים שוב ושוב ממשיכים לקבל אותה. (מסקנה– תוכיחו דברים בריגורוזיות ואל תתסכו עם פואסון)
1846 – Chebyshev דיבר על מומנטים $k \mapsto \mathbb{E}X^k$
1853 – Cauchy עשה משהו חשוב מאוד שאף אחד לא זוכר. אבל ללא ספק זה היה חשוב ומרכזי.
1901 – Lyapunov סידר את ההוכחה הלא רגורוזית של Laplase להוכחה רגורוזית של טענה דומה.
1922 – Lindeberg סידר הכל להוכחות אלמנטריות. אותן נלמד.

סדרות ב"ת אינסופיות

מאורעות בלתי תלוים

אנחנו צריכים מספר אינסופי של מאורעות בלתי תלוים, לכן מספיק להתחמק ממרחבי הסתברות.
נשים לב למרחב הסתברות מעניין הבא: $\Omega = [0,1)$ עם מידת לבג.

$$\omega = (0.\beta_1\beta_2\ldots)_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{2^k} \qquad \beta_k \in \{0,1\}$$

הייצוג הבינארי של מספר ממשי כלשהו (או באופן שקול לגמרי אינסוף הטלות של מטבע הוגן).
מה קיבלנו? קיבלנו בעצם $\beta_k[0,1) \to \{0,1\} \subseteq \mathbb{R}$ משתנים מקריים. יתר על כן, היינו אפילו רוצים להגיד שהם ב"ת.
אבל מה זה בכלל סדרה אינסופית של משתנים ב"ת?

הגדרה. מ"מ $X_1, X_2, \ldots$ הם ב"ת אם לכל n $X_1, \ldots, X_n$ ב"ת.

אפשר גם להגדיר ככפל אינסופי:

$$\mathbb{P}(X_1 \in I_1, X_2 \in I_2, \ldots) = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_i \in I_i)$$

מדוע? כי זאת סדרה יורדת ולכן מידת חיתוך אינסופי שווה לגבול המידות של הקבוצות.
זאת דוגמא לא טריוויאלית של סדרה אינסופית של מ"מ ב"ת.
מה אם נרצה סדרת מאורעות עם הסתברות שליש לכל אחד? נסתכל על פיתוח טרנארי.
עם קצת השקעה נוכל אפילו למצוא משהו כמו הראשון שליש, השני עשירית וכו'.

הגדרה. מאורעות $A_1, \ldots, A_n$ ב"ת אם $\mathbb{1}_{A_1}, \mathbb{1}_{A_2}, \ldots, \mathbb{1}_{A_n}$ הם מ"מ בלתי תלוים.

משפט. הלמה של בורל קנטלי
יהיו $A_1, A_2, \ldots,$ מאורעות. נגדיר $S = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_i}$ (סכום כזה כמובן יכול להיות סופי או אינסופי) אז בעצם

$$S : \Omega \to \{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$$

אז:

1. אם $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_i}$ אז $S < \infty$ כמעט בטוח.
2. אם בנוסף המאורעות ב"ת ו- $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = \infty$ אז $S = \infty$ כמעט בטוח.

עבור משתנים ב"ת $\mathbb{P}(S < \infty)$ היא או 0 או 1 וזה כמובן מקרה פרטי של חוק 0-1 של קולמגורוב.

דוגמא. יהיו $U_1, U_2, \ldots$ מ"מ ב"ת ש"ה כש ש- $U_1 \sim U(-1, 1)$ (כלומר התפלגות אחידה בקטע $(-1, 1)$). כלומר,

$$P(A) = \frac{\text{Leb}(A)}{2}$$

הסדרה $\{nU_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא כ"ב צפופה ב-$\mathbb{R}$. אבל הסדרה $\{n^2U_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא לא.
כלומר אם נגריל באקראי נקודה מהקטע $[-1, 1]$ ונקודה שנייה מהקטע $[-2, 2]$ ואז בקטע $[-3, 3]$ וכו', מבחינת הקבוצה לא כל כך ברור מה אמור לצאת אבל נקבל קבוצה בת מניה צפופה.
בדוגמא השנייה מתחילים מ- $[-1, 1]$ ואז קופצים ל- $[-4, 4]$ למה שבכלל יהיה הבדל? אבל עובדה שמקבלים קבוצה בדידה.
ובכל זאת, זה קשור להתכנסות הטור המתאים. במקרה הראשון נקבל ממקום מסויים טור הרמוני שמתבדר ובדוגמא השנייה החל ממקום מסויים $\frac{1}{n^2}$ שהוא כמובן מתכנס.

במרחב הסתברות כאשר יש סדרה A_k של מאורעות ב"ת כך שהסכום מתבדר $\sum P(A_k) = \infty$, $p_k \to 0$ נתבונן בסדרה של מ"מ $X_k = \mathbb{1}_{A_k}$. האם $X_k \to 0$? כמובן שזה תלוי באיזה התכנסות אנחנו מעוניינים. למשל,

$$\mathbb{P}(|x_k| \leq \varepsilon) \to 1$$

ואפילו

$$\mathbb{P}(x_k = 0) \to 1$$

$$\mathbb{E}|x_k| = p_k \to 0$$

במובנים האלה היא אכן שואפת ל-0. אבל אם ניקח $\{\omega X_k(\omega) \to 0\} = \{S < \infty\}$ זאת קבוצה זניחה כי הטור מתבדר (זאת, אגב, הייתה התכנסות כב"מ). אז כנראה שבכל זאת לא מתכנסת לשום דבר.
סדרה תיפוסית:

$$0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots,$$

כאשר ה–1 הם יותר ויותר רחוקים בכל פעם.

$$\limsup X_k(\omega) = 1$$

$$\liminf X_k(\omega) = 0$$

דוגמא יותר אנליטית:
ניקח את הקטע $[0,1]$
2 ERUTCIP
אורך של קטע שואף ל–0 אבל בכל נקודה מבקרים איסוף פעמים. מדוע? כי סכום כל הערכים הוא אינסוף. אבל כמובן שהם תלויים מבחינת הסתברות ולכן זאת קבוצה מוזרה.

משפט. יהיו $A_1, A_2, \ldots$ מאורעות ב"ת

$$\forall n \quad \mathbb{P}(A_n) = p$$

נגדיר $S_n = \mathbb{1}_{A_1} + \ldots + \mathbb{1}_{A_n}$. אז,

$$\frac{S_n}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p \quad \text{כ"ב}$$

וזה מקרה פרטי של חוק החזק של המספרים הגדולים.
אם נחזור להילוך מקרי רגיל כאשר $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ $X_n = 2\beta_n - 1$ רק עכשיו יש לנו הילוך מקרי אינסופי. אז לפי החוק החזק $\frac{S_n}{n} \overset{n\to\infty}{\underset{\text{כ"ב}}{\longrightarrow}} 0$.
כלומר לכמעט כל מסלול הזווית מתכנסת ל–0 (כמובן שלא באופן מונוטוני).
כך נקבל, שכמעט כל לכל מספר חצי מהספרות הבינאריות 0 וחצי מהספרות הבינאריות הן 1. החוק החלש לא נותן את זה.
באופן דומה גם לספרות העשרוניות. נגדיר ספרות עשרוניות:

$$x = (0.\alpha_1\alpha_2\ldots)_{10} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{10^n}$$

$$\alpha_n \in \{0,1,\ldots,9\}$$

נאמר כי x נורמלי בבסיס 10 אם $\forall a \in \{0,1,\ldots,9\}$

$$\frac{\#\{k \le n : \alpha_k = a\}}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{10}$$

$\forall a,b \in \{0,1,\ldots,9\}$

$$\frac{\#\{k \le n : \alpha_k = a, \alpha_{k+1} = b\}}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{100}$$

$$\vdots$$

$$\forall k = 1, 2, 3, \ldots \forall a_1, \ldots, a_{l-1} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$$

$$\frac{\#\{k \leq n : \alpha_k = a_1, \alpha_{k+1} = a_2, \ldots \alpha_{k+l} = a_{l-1}\}}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{10^k}$$

האם יש בכלל כאלה? כן! כמעט כולם. ודוגמא אמיתית:

$$0.123456789101112 \ldots 99100101101 \ldots$$

זה לא מובן מאילו שהוא נורמלי בבסיס 10, אבל הוא אכן כזה.
מספר נורמלי הוא מספר שנורמלי בכל בסיס $2, 3, 4, \ldots$. למצוא אחד כזה זה באמת סיפור.
יש אלגוריתם שבונה בעבודה קשה מספר נורמלי. אבל האלגוריתם עובד רק בתיאוריה כי אקספוננציאלי.

משפט. כמעט כל המספרים ב- $(0, 1)$ הם נורמליים.

זה נובע בקלות מחוק החזק של המספרים הגדולים. בהסתברות אין בעיה להוכיח את זה.
באנליזה (בלי הסתברות) עדיין לא מצליחים להוכיח שקיים אפילו אחד.
מי שחשב שלדרוש יותר מזה כבר אי אפשר, טעה. ניקח

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\beta_n(\omega) - 1}{n} = S(w)$$

$$\omega = (0.\beta_1\beta_2 \ldots)_2 \in (0, 1)$$

זה לא טור הרמוני ולא טור לייבניץ. מה יקרה מזה? הוא מתכנס כ"ב. אף אחד לא יכול לצייר גרף של $S(\omega)$. כי יש לה תכונה מעניינת: לכל מלבן יש קבוצה לא זניחה $\{x \in (0, 1) : x \in (a, b) S(x) \in (c, d)\}$ בהשוואה לזו פונקציה דיריכלה הכי יפה שיש. זאת מפלצת אמיתית.