

הסתברות למתמטיקאים – הרצאה 19

16.5.11

הגענו לחלק השלישי. אבל בגלל שעכשיו זה חלק של סקירה ולא מגדירים כלום אז במקום מרטינגלים נדבר על מפלצות.

שתי מפלצות a_1, b_1 נכנסות לקרב שרק אחת מהן יכולה לנצח. a_1 מנצח בהסתברות $\frac{a_1}{a_1+b_1}$ ו- b_1 מנצח בהסתברות $\frac{b_1}{a_1+b_1}$ כלומר ההסתברות קשורה ל"מסה" של המפלצת. אם נאמר a_1 תנצח, היא תאכל את b_1 וה"מסה" שלה תהיה $a_1 + b_1$. ואז המפלצת שתנצח, למשל a_1 תתחרה עכשיו נגד b_2 וכו'. נרצה להראות שעבור $A = a_1 + \dots + a_m, B = b_1 + \dots + b_n$ אז ההסתברות שהקבוצה של a תנצח היא $\frac{A}{A+B}$ וההסתברות שהקבוצה של B תנצח היא $\frac{B}{A+B}$ כלומר לא תלוי בסדר בין המפלצות.

נדבר גם קצת על הילוך מקרי. נסמן $T = \inf\{n : S_n = \pm 10\}$. כמובן $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ וכן $\mathbb{E}T = 10^2$.

נדבר גם על חלקיקים שמתרבים. נחשוב שיש להם דורות. בדור 0 יש חלקיק 1. בדור 1 יכול להיות או 0 חלקיקים (כי החלקיקים מת) או שני חלקיקים (בסיכוי p). כעת בכל דור כל חלקיק יכול או למות או ליצור זוג חלקיקים חדשים. אם z_n מספר החלקיקים בדור n , אז z_n תמיד מספר זוגי ו- $\mathbb{P}(z_{n+1} = 2k | z_0, z_1, \dots, z_n) = \binom{z_n}{k} p^k (1-p)^{z_n-k}$ כאשר k מהחלקיקים התרבו. זה נקרא תהליך הסתעפות פשוט. קל לנחש שאם $p < 1/2$ אז החלקיקים יכחדו. פחות ברור לגבי $p = 1/2$.

טענה. אם $p \leq 0.5$ אז $\mathbb{P}(\exists n, z_n = 0) = 1$ כלומר כמעט בטוח יש הכחדות.

מצד שני,

טענה. אם $p > 0.5$ אז כ"כ קיים גבול

$$M_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{(2p)^n}$$

קל להבין ש- $2p$ זה התוחלת של z_n . והסתברות להכחדה:

$$\mathbb{P}(\exists n, z_n = 0) = \mathbb{P}(M_\infty = 0) = \frac{1-p}{p}$$

זה לא מובן פאילו.
בנוסף,

$$\mathbb{E}M_\infty = 1$$

זה כל התוצאות של מרטינגלים (למרות שבכלל לא ראינו מרטינגלים).
נדבר גם קצת על התנאים:

משפט. תהי μ מידת הסתברות ב- $\mathbb{R}^2$ (כלומר $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2)$). אז קיימות מידת הסתברות ν ב- $\mathbb{R}$, ומידות הסתברות μ_x ב- $\mathbb{R}$ עבור $x \in \mathbb{R}$ כך שלכל $A \in \mathcal{B}_2$:

$$\mu(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu_x(A_x) \nu(dx)$$

כאשר

$$A_x = \{y : (x, y) \in A\}.$$

זה יכול להזכיר קצת משפט פוביני.

מה אומר פוביני?

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx$$

נציב $\mathbb{1}_A(x, y)$ ואז $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x, y) dy = \text{mes}_1(A_x)$.

אבל במשפט פוביני לא צריך שום קיום. מידת לבג דו ממדית יש לנו, מידת לבג חד ממדית יש לנו. במשפט שלנו בכלל לא מדובר על מידת לבג. גם לא ממש ברור מה זה חתך של מידה. חתך של פונקציה אנחנו מכירים אבל חתך של מידה פחות. נתחיל עם הוכחות. קודם נתחיל בהגדרות.

מרטינגלים

לפני שסוף סוף נגדיר מרטינגלים, אנחנו נגדיר פילטרציה:

הגדרה. תהי $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מרחב הסתברות.

1. פילטרציה ב- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ היא סדרה עולה של תת שדות σ :

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}$$

2. תהליך תואם (לפילטרציה) הוא $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ כך שלכל n X_n מדיד ביחס ל- $\mathcal{F}_n$.

ככה בתורת ההסתברות מבטאים זמן.

נדבר קצת על הסתברות בדידה. בהסתברות בדידה אנחנו מכירים התנאים: יש לנו תת שדה σ $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}$ (חלוקה של מרחב ההסתברות) $\Omega = A_1 \uplus \dots \uplus A_m$. $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, A_1, \dots, A_m, A_1 \uplus A_2, A_1 \uplus A_3, \dots, \Omega\}$. כעת לכל $\omega \in A_k$ אז

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)(\omega) = \sum_{\omega_1 \in A_k} X(\omega_1) \frac{P(\omega_1)}{P(A_k)}$$

הגדרה. יהי מרחב ההסתברות עם פילטרציה. מרטינגל הוא תהליך תואם $(M_n)_{n=0,1,2,\dots}$

$$\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M_n, \mathbb{E}|M_n| < \infty, n \text{ שלכל}$$

הדוגמא הרגילה היא בורסה. בקירוב גס שער המניה בבורסה הוא מרטינגל. היום יש שער מסויים ואנחנו לא יודעים מה יקרה מחר. אבל אנחנו מנחשים. נניח שכולם חושבים שהמניה תעלה אז כולם ירצו לקנות ואז היא לא תעלה. אם הבורסה במצב נורמלי אז מישו מוכר ומישו קונה, אז הציפיה למחר שווה לזאת שיש היום. זה לא באמת ככה, כי ככה אין מוטיבציה לשחק בבורסה. אבל בקירוב גס זה בסדר.

נשים לב שמרטינגל זה לא אותו דבר כמו להגיד שהתוחלת קבועה. ל- $X_n = nX_1$,
 $X_1 = \begin{cases} 1 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{cases}$ התוחלת קבועה אבל זה לא מרטינגל. אם אנחנו יודעים ש- $X_3 = 3$
 אז בטוח $X_4 = 4$.

הגדרה. יהי מרחב התסברות עם פילטרציה. סופר מרטינגל הוא תהליך תואם $(M_n)_{n=0,1,2,\dots}$
 כך שלכל n , $\mathbb{E}|M_n| < \infty$, $\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq M_n$.

הגדרה. יהי מרחב התסברות עם פילטרציה. סוב מרטינגל הוא תהליך תואם $(M_n)_{n=0,1,2,\dots}$
 כך שלכל n , $\mathbb{E}|M_n| < \infty$, $\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq M_n$.

במקרה כללי נגדיר מרטינגל:

$$\forall Y \in L_\infty(\mathcal{F}) \quad \mathbb{E}((M_{n+1} - M_n)Y) = 0$$

או במילים אחרות

$$\forall k \quad \mathbb{E}(M_{n+1} - M_n | A_k) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}(M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_1) = 0$$

אפשר להכליל גם סופר מרטינגל וסוב מרטינגל באופן הבא:
 סופר מרטינגרל:

$$\forall Y \in L_\infty^+(\mathcal{F}) \quad \mathbb{E}((M_{n+1} - M_n)Y) \leq 0$$

סוב מרטינגרל:

$$\forall Y \in L_\infty^+(\mathcal{F}) \quad \mathbb{E}((M_{n+1} - M_n)Y) \geq 0$$

מה יקרה עם נכתוב

$$\forall Y \in L_\infty(\mathcal{F}) \quad \mathbb{E}((M_{n+k} - M_n)Y) = 0$$

מתברר שזה שקול להגדרה של מרטינגל. נבדוק עבור $k = 2$.

$$Y \in L_\infty(\mathcal{F}) \subseteq L_\infty(\mathcal{F}_{n+1})$$

$$\mathbb{E}((M_{n+2} - M_n)Y) = ((M_{n+2} - M_{n+1})Y) + ((M_{n+1} - M_n)Y) = 0 + 0 = 0$$

אם $\mathbb{M}_n = \mathbb{M}_0 : Y = 1$

אם $X \in L_1$

$$M_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$$

אז M_n הוא מרטינגל. אפשר לשאול האם זאת צורה כללית של מרטינגל. מקומית, כלומר
 כאשר $(M_n)_{n=0}^N$ זה כן. $X = M_N$ ואז $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) = M_n$.
 מה לגבי סופר מרטינגל?

$(X_n)_{n=0}^N$ סופר מרטינגל. $M_n = \mathbb{E}(X_N | \mathcal{F}_n)$ הוא מרטינגל.

$$\underbrace{\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_n)}_{M_n} \leq X_n$$

תהליך X הוא מעל המרטינגל המתאים. בסוף הם שווים אבל בדרך התהליך נמצא מעל המרטינגל. בגלל זה נקרא סופר מרטינגל.

f קומרה, (M_n) מרטינגל, $X_n = f(M_n)$ סובמרטינגל. הילוך (S_n) הוא מרטינגל אבל (S_n^2) היא סוב מרטינגל.

עכשיו נוכיח את הטענה עם מפלצות. נסמן $-M_n$ מסה של כל המפלצות מסוג a ברגע n . זה מרטינגל.

אם בשלב כלשהו המסה היא M_n . בשלב הבא אם המפלצת הפסידה המסה היא $M_n - a$ ואם ניצחה אז $M_n + b$. לכן $(M_n - a)\frac{b}{a+b} + (M_n + b)\frac{a}{a+b} = M_n$.

$$M_{m+n} = \begin{cases} A + B & \frac{A}{A+B} \\ 0 & \frac{B}{A+B} \end{cases}$$

ולכן $A = \mathbb{E}M_0 = \mathbb{E}M_{m+n}$.

הגדרה.

1. תהליך ניתן לחיזוי $(C_n)_{n=1,2,\dots}$ כך שלכל n, c_n מדיד ביחס ל- $\mathcal{F}_{n-1}$.

2. יהיו (X_n) תהליך תואם ו- (C_n) תהליך ניתן לחיזוי אז:

$$(C \bullet X)_0 = 0$$

$$(C \bullet X)_{n+1} = (C \bullet X)_n + C_{n+1}(X_{n+1} - X_n)$$

מפורשות:

=

$$(C \bullet X)_n = C_1(X_1 - X_0) + C_2(X_2 - X_1) + \dots + C_n(X_n - X_{n-1}) = \\ - (C_2 - C_1)X_1 - \dots - (C_n - C_{n-1})X_{n-1} + C_n X_n$$

וזה קצת מזכיר כמה כסף מרוויחים בבורסה.

בהצלחה אין כסף ובכל יום הבא זה הכסף שיש היום ועוד הכסף שחוזים לקבל בין היום למחר.

משפט. יהי (M_n) פרטינגל. (C_n) תהליך ניתן לחיזוי ו- $C_n(M_n - M_{n-1}) \in L_1$ לכל $n = 1, 2, \dots$ אז $(C \bullet M)$ הוא פרטינגל.

האם זה טוב? זה אומר שלא משנה באיזה אסטרטגיה חכמה משחקים בבורסה זה לא עוזר כלום.

הוכחה. יהי $Y \in L_\infty(\mathcal{F}_n)$, האם $\mathbb{E}(C_{n+1}(M_{n+1} - M_n)Y) = 0$ זה אנחנו רוצים להראות.

אם $C_{n+1}Y \in L_\infty$ אז סיימנו.
גם עבור

$$C_{n+1} \mathbb{1}_{(-k,k)}(C_{n+1})$$

סיימנו.

מה יקרה כאשר $k \rightarrow \infty$? יש התכנסות כ"ב נרצה להשתמש במשפט ההתכנסות הנשלטת.
נשמיד בישעור הבא.

□