

הסתברות למתמטיקאים – הרצאה 17

4.5.11

בשעיור הקודם הוכחנו את המשפט עם ההתפלגות של $S_n = x_0 \rightarrow \frac{1}{m}$. מה היה חשוב שם?

- עקרון השיקוף.
- דרשנו שהגרף לא יהיה מחזורי. זה קצת חבל כי זה הורס אפילו גרפים פשוטים (למשל זוג קודקודים עם צלע מכוונת מאחד לשני ומהשני לראשון).

שרשראות מרקוב סופיות

V קבוצה סופית של קודקודים. נגדיר פונקציה $p : V \times V \rightarrow [0, 1]$ כך ש- $p(xy)$ הסתברות המעבר מקודקוד x לקודקוד y . נדרוש $\sum_y p(x, y) = 1 \forall x$. אבל כאן לא דווקא $\sum_x p(x, y) = 1 \forall y$ כמו שהיה לנו קודם, כשהגרף היה רגולרי. נגדיר את צלעות הגרף $E \subseteq V \times V$ באופן הבא: $E = \{(x, y) : p(x, y) > 0\}$. נסמן:

$$p(\underbrace{S_0}_{x_0}, S_1, \dots, S_n) = p(S_0, S_1) \cdot p(S_1, S_2) \dots p(S_{n-1}, S_n)$$

קיים:

$$\sum_{S_1, \dots, S_n} p(S_0, \dots, S_n) = 1$$

פשוט כל האפשרויות למסלולים באורך n .
הגדרות נוספות:

1. $A \subseteq V$ נקראת סגורה אם $(A \times (V \setminus A)) \cap E = \emptyset$. כלומר, אין יציאה מ- A .
2. שרשרת מרקוב תקרא אי פריקה אם $V, \emptyset$ הן הקבוצות הסגורות היחידות. באופן שקול, לכל זוג קודקודים קיים מסלול ביניהם.
3. שרשרת מחזורית מוגדרת כמו גרף מחזורי (החלק של אין לולאות מגדלים לא זרים).

נראה שני משפטים בלי הוכחה רגורזית:

משפט. אם שרשרת מרקוב אי פריקה ולא מחזורית אז לכל $y \in V$ הגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n = y)$$

קיים.

הקושי כאן יחסית למשפט שהוכחנו כבר הוא שאין לנו מושג לאן זה אמור להתכנס. צריך להוכיח שזאת סדרת קושי ובכלל השתמשנו הרבה בהנחה שהכל עם התפלגות אחידה.

הגדרה. מידת הסתברות μ על V תקרא סטציונרית אם:

$$\mu(y) = \sum_x \mu(x)p(x, y)$$

וזה מאוד הגיוני. "מה שהיה אתמול זה מה שהיה היום". כדי לדעת את ההסתברות ל- y הולכים צעד אחד אחורה וסוכמים.

משפט. אם שרשרת מרקוב אי פריקה ולא מחזורית, אז קיימת ויחידה מידת סטציונרית μ . כמו כן, לכל מידת הסתברות ν על V קיים:

$$\mu(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_x \nu(x)p_n(x \rightsquigarrow y)$$

כלומר, μ "מושכת את ההתפלגות אליה" (מכך גם אפשר לראות יחידות). הנחנו כאן שהשרשרת לא מחזורית. אבל אולי זה לא תנאי הכרחי. אם יש מחזור d , נסמן:

$$V = V_1 \uplus V_2 \uplus \dots \uplus V_d$$

ואפשר לעשות איזשהי רדוקציה ל- (V_1, p_d) ומשם זה כבר לא מחזורי, יש מידה סטציונרית ואז קיים:

$$\forall x \in V \mathbb{P}(S_{nd} = x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(x)$$

נשים לב שאת המידה "נגדיר" (אבל לא באמת) כך:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d} (\mathbb{P}(S_{nd} = x) + \mathbb{P}(S_{nd+1} = x) + \dots + \mathbb{P}(S_{nd+d-1} = x)) =$$

מידה סטציונרית של (v, p)

הגדרות נוספות:

1. $x \in V$ מצב חולף אם קיים y עבורו יש מעבר מ- x ל- y אך אין מעבר מ- y ל- x . אחרת, x נקרא מצב נשנה.

הערה. נשים לב שאם μ מידה סטציונרית, x מצב חולף ואז $\mu(x) = 0$.

2. יהיו x, y מצבים נשנים.

$x \sim y \Leftrightarrow$ יש מעבר מ- x ל- y ומ- y ל- x (השני נובע מהראשון, כי x נשנה).

הערה. נשים לב שזהו אכן יחס שקילות. מקבלים מחלקות שקילות של מצבים נשנים ועוד קבוצה של מצבים חולפים. בכל אחת ממחלקת השקילות של המצבים הנשנים כי מעין "מידה סטציונרית פנימית", ולכל הגרף תהיה מידה שהיא סוג של קומבינציה לינארית / קמורה.

זמן חזרה

נחזור לגרפים רגולריים, קשירים וכו'.

הגדרה. זמן חזרה

$$T = \min\{t > 0 : S_t = S_0\}$$

למה. $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ ואפילו יותר מכך: $\mathbb{E}(T) < \infty$.

הוכחה. $\exists n, \mathbb{P}(T > t + n : \underbrace{S_0, \dots, S_t}_{\text{יודעים את המסלול עד } t}) < 1$ זה נכון כי קיים מסלול ל- x_0 .
המשך ההוכחה בשיעור הבא.