

הסתברות למתמטיקאים – הרצאה 16

2.5.11

התחלנו לדבר על הילוך מקרי בגרף. אנחנו רוצים להוכיח שקיים n כך שלכל $x, y \in V$ ולכל $t \geq n$ קיים מסלול מ- x ל- y באורך t בדיוק. כאן נשתמש בזה שהגרף לא מחזורי. הגדרנו:

$$L_x = \{x\text{-לולאות מ-}x\}$$

$L_x - L_x$ היא חבורה ולכן מהצורה $p_x \mathbb{Z}$ כי זאת הצורה הכללית של תת-חבורה של $\mathbb{Z}$. מה שמעניין זה $p_x = p$ מדוע? כי $L_x - L_x = L_y - L_y$ כלומר החבורה לא תלויה בקודקוד. יתר על כן $p = 1$ כי אחרת הגרף מחזורי. כלומר, קיים N_x כך ש- $N_x \in L_x$ וגם $N_x + 1 \in L_x$. נתבונן ב- $n_x = N_x^2$.

נרצה להראות ש- $n_x, n_x + 1, \dots \in L_x$. יהי $k \geq n_x = N_x^2$. נציג: $k = N_x^2 + aN_x + r$. כאשר $a \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $r \in \{0, 1, 2, \dots, N_x - 1\}$. רוצים לקבל את הצורה: $k = (\dots)N_x + (\dots)(N_x + 1)$.

הרעיון הוא לכתוב $k = \dots + (N_x + 1)r$. כעת נכתוב: $k = N_x(N_x + a - r) + (N_x + 1)r$. כאשר $r \geq 0$. הכי חשוב הוא שגם $N_x + a - r \geq 0$ כי $r < N_x$ ו- $a \geq 0$. כעת ניקח m כך ש- $m = (\max_{x \in V} n_x) + m$ וכך שלכל $x, y \in V$ יש מסלול ביניהם באורך $\leq m$.

כעת אם נלך מ- x ל- y זה יקח לכל היותר m צעדים, כעת נעשה לולאה שתבזז את הצעדים המיותרים. כלומר יש מסלולים מכל אורך $\{m + n_y, m + n_y + 1, \dots\}$. נחזור לתורת ההסתברות. יהי Ω_1 קבוצת כל הסדרות מתוך $\{(S_0, \dots, S_n) \in V^n\}$ כאשר $S_0 = x_0$. נגדיר גם Ω_2 קבוצת כל הסדרות מתוך $\{(x'_0, \dots, x'_n) \in V^n\}$ שמגדירים מסלול חוקי בגרף (כלומר $(x'_i, x'_{i+1}) \in E$). כאן $x'_0 = x_0$. נגדיר $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. $P = P_1 \times P_2$.

ניקח $S_0, \dots, S_n : \Omega \rightarrow V$, $S'_0, \dots, S'_n : \Omega \rightarrow V$ אלה שתי סדרות ב"ת כי מדובר על מידת מכפלה. כעת נחזור שוב לעקרון השיקוף. נגדיר אינדיקטור פגישה $M_n : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$:

$$M_n = \begin{cases} 0, & S_1 \neq S'_1, \dots, S_n \neq S'_n \\ 1, & \text{אחרת} \end{cases}$$

האינדיקטור יהיה 1 אם ההילוך שלנו חותך את האלכסון בריבוע של V^2 .

למה.

$$\mathbb{E}(f(S_n, S'_n) \mathbb{1}_{M_n=1}) = 0$$

לכל $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש- $f(x, y) = -f(y, x)$.

ההוכחה בדיוק כמו במקרה של הילוך מקרי ושיקוף.

תוצאה.

$$\mathbb{E}(f(S_n, S'_n) \mathbb{1}_{M_n=0}) = \mathbb{E}f(S_n, S'_n)$$

ההסתברויות קרובות. מדוע? ניקח $|\mathbb{P}(S_n = a) - \mathbb{P}(S'_n = a)| \leq \mathbb{P}(M_n = 0)$ כלומר אם סיכוי קטן ש- $M_n = 0$ אז שתי

$$f(x, y) = \mathbb{1}_{\{a\}}(x) - \mathbb{1}_{\{a\}}(y)$$

ואז

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n = a) - \mathbb{P}(S'_n = a) &= \mathbb{E}f(S_n, S'_n) = \\ &= \mathbb{E}\mathbb{1}_{\{a\}}(S_n) - \mathbb{E}\mathbb{1}_{\{a\}}(S'_n) = \mathbb{P}(S_n = a) - \mathbb{P}(S'_n = a) \end{aligned}$$

מצד שני $\mathbb{P}(M_n = 0)$ תלויה ב- x_0, x'_0 - נקודות ההתחלה של שני ההילוכים המקריים, אבל $\mathbb{P}(M_n = 0) \leq \varepsilon_n$ כאשר $\varepsilon_n = \max_{x_0, x'_0} \mathbb{P}(M_n = 0)$.

למה.

$$\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

את זה נוכיח עוד מעט. ובינתיים נמשיך עם ההוכחה. יש לנו הסתברויות מעבר $p_1(x, y), \dots, p_n(x, y)$ כאשר:

$$\mathbb{P}(S_n = a) = p_n(x_0, a)$$

$$\mathbb{P}(S'_n = a) = p_n(x'_0, a)$$

ברור ש- $\sum_y p_1(x, y) = 1$ ו- $\sum_x p_1(x, y) = 1$ וזה נכון כי הגרף רגולרי. כעת באינדוקציה זה נכון לכל n כי $\sum_y p_1(x, y)p_1(y, z) = p_2(x, z)$.

כעת,

$$\forall x'_0 \quad |p_n(x_0, a) - p_n(x'_0, a)| \leq \varepsilon_n$$

כעשיו רעיון מבריק הוא לקח ממוצע על כל x'_0 :

$$|p_n(x_0, a) - \frac{1}{m} \sum_{x'_0 \in V} p_n(x'_0, a)| \leq \varepsilon_n$$

כאשר $|V| = m$.

$$|p_n(x_0, a) - \frac{1}{m}| \leq \varepsilon_n \rightarrow 0 \text{ לכן } \sum_{x'_0 \in V} p_n(x'_0, a) = 1$$

ואז לכל a : $\frac{1}{m} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p_n(x_0, a)$ וזה בדיוק מה שרצינו להראות.

נותר רק להראות את הלמה. קיים n כך ש- $p_n(x, y) \neq 0$ לכל $x, y \in V$. לכן $p_n(x, y) \geq \theta$. $\theta = 1 - k^{-2n} < 1$ כאשר $\mathbb{P}(M_n = 0) \leq \theta$ לכן $\mathbb{P}(M_{t+n} = 0 | M_t = 0, S_t = a, S'_t = b) \leq \theta$ וזה נכון לכל a, b, t . אז נקבל

$$\mathbb{P}(M_{t+n} = 0 | M_t = 0) \leq \theta$$

וזה אומר ש- $\mathbb{P}(M_{t+n} = 0) \leq \theta \mathbb{P}(M_t = 0)$ ואז $\mathbb{P}(M_{t+n} = 0) \leq \theta^j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ ו- $\mathbb{P}(M_t = 0) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$.