

הסתברות למתמטיקאים – הרצאה 15

27.4.11

$X_1, X_2, \dots$ מ"מ ב"ת ש"ה, $S_n = X_1 + \dots + X_n$, זמני החזרה הם $\tau_1, \tau_2, \dots$ ורצינו להוכיח שלכל $t_1, \dots, t_k < \infty$ מתקיים:

$$\mathbb{P}(\tau_1 = t_1, \tau_2 - \tau_1 = t_2, \dots, \tau_k - \tau_{k-1} = t_k) = \mathbb{P}(\tau_1 = t_1) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(\tau_1 = t_k)$$

וזה בסדר לכתוב $\tau_i - \tau_{i-1}$ כי שניהם לא אינסוף.

הוכחה. נוכיח עבור $k = 2$ ומקרה כללי הוא דומה מאוד. כלומר נוכיח

$$\mathbb{P}(\tau_1 = k, \tau_2 - \tau_1 = l) = \mathbb{P}(\tau_1 = k) \mathbb{P}(\tau_1 = l)$$

נגדיר

$$A = \left\{ (X_1, \dots, X_{k+l}) \mid \begin{matrix} S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{k-1} \neq 0, \\ S_k = 0, S_{k+1} \neq 0, \dots, S_{k+l} = 0 \end{matrix} \right\}$$

כאן רק S_k, S_{k+l} הם 0.
באופן אחר נכתוב:

$$A = B \times C$$

כאשר:

$$B = \{(X_1, \dots, X_k) \mid S_1 \neq 0, \dots, S_k = 0\}$$

$$C = \{(X_1, \dots, X_l) \mid S_1 \neq 0, \dots, S_l = 0\}$$

כעת,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\tau_1 = k, \tau_2 = k + l) &= \int \mathbb{1}_A d\mu^{k+l} = \\
 &= \int_{\mathbb{R}^{k+l}} \mathbb{1}_A(X_1, \dots, X_{k+l}) \mu(dX_1) \dots \mu(dX_{k+l}) = \\
 &= \int_{\mathbb{R}^{k+l}} \mathbb{1}_B(X_1, \dots, X_k) \mathbb{1}_C(X_{k+1}, \dots, X_{k+l}) \mu(dX_1) \dots \mu(dX_{k+l}) = \\
 &= \left(\int_{\mathbb{R}^k} \mathbb{1}_B(X_1, \dots, X_k) \mu(dX_1) \dots \mu(dX_k) \right) \cdot \\
 &\quad \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^l} \mathbb{1}_C(X_{k+1}, \dots, X_{k+l}) \mu(dX_{k+1}) \dots \mu(dX_{k+l}) \right) = \\
 &= \left(\int \mathbb{1}_B d\mu^k \right) \left(\int \mathbb{1}_C d\mu^l \right) = \mathbb{P}(\tau_1 = k) \mathbb{P}(\tau_1 = l)
 \end{aligned}$$

□

מכאן נוכל להסיק:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\tau_2 < \infty) &= \sum_{k,l=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_1 = l, \tau_2 = k + l) = \sum_{k,l} \mathbb{P}(\tau_1 = k) \mathbb{P}(\tau_1 = l) = \\
 &= \left(\sum_k \mathbb{P}(\tau_1 = k) \right) \left(\sum_l \mathbb{P}(\tau_1 = l) \right) = (\mathbb{P}(\tau_1 < \infty))^2
 \end{aligned}$$

כעת נוכל להוכיח משפט חשוב בקלות:

משפט. TFAE: התנאים הבאים שקולים:

$$1. \exists n > 0, S_n = 0 \text{ כ"כ.}$$

$$2. S_n = 0 \text{ עבור אינסוף ערכי } n \text{ כ"כ.}$$

$$3. \sum_n \mathbb{P}(S_n = 0) = \infty.$$

בכתיב שונה:

$$1. \mathbb{P}(\tau_1 < \infty) = 1$$

$$2. \forall k \mathbb{P}(t_k < \infty) = 1$$

$$3. \mathbb{E} \sup\{k : \tau_k < \infty\} = \infty$$

הוכחה. $2 \Rightarrow 1$ טריוויאלי.

$2 \Rightarrow 3$ טריוויאלי בכתיב אחר.

$$1 \Rightarrow 2 \text{ כי אם } \mathbb{P}(\tau_1 < \infty) = 1 \text{ אז } \forall k (\mathbb{P}(\tau_1 < \infty))^k = 1 \text{ ולכן ממה שראינו } \forall k \mathbb{P}(\tau_k < \infty) = 1$$

$3 \Rightarrow 1$ נשים לב: $\sup\{k : \tau_k < \infty\}$ הוא מ"מ בעל התפלגות גיאומטרית. מכך שהתוחלת שלו היא אינסוף (וכן מהצורה $\frac{1}{p}$) אז הסיכוי להצלחה p (כאשר הצלחה במקרה שלנו היא $k = \infty$) הוא 0, ואחרת התוחלת הייתה סופי, לכן $\mathbb{P}(\tau_1 = \infty) = 0$ ואז $\mathbb{P}(\tau_1 < \infty) = 1$ כפי שרצינו. □

הילוך מקרי בגרף

$G = (V, E)$ קיים: $|V| = n, E \subseteq V \times V$. נרשה לולאות (צלעות מהצורה (a, a)) אבל מטעמי נוחות לא נרשה צלעות מרובות. נתבונן בגרף k -רגולרי: לכל קודקוד k צלעות נכנסות ויוצאות. כמו כן נרצה שהגרף יהיה קשיר חלש:

$$\forall A (\emptyset \subsetneq A \subsetneq V \Rightarrow ((A \times B) \cap E) \cup ((B \times A) \cap E) \neq \emptyset)$$

כאשר $B = V \setminus A$.

למה.

$$|A \times B \cap E| = |B \times A \cap E|$$

הוכחה. נשים לב, מ- k רגולריות:

$$|A \times V \cap E| = k|A|$$

$$|V \times A \cap E| = k|A|$$

לכן,

$$|A \times V \cap E| = |V \times A \cap E|$$

אז:

$$|A \times A \cap E| + |A \times B \cap E| = |A \times A \cap E| + |B \times A \cap E|$$

ולכן

$$|A \times B \cap E| = |B \times A \cap E|$$

□

כנדרש.

כלומר, גרף k רגולרי קשיר חלש הוא למעשה קשיר חזק.

למה. קיים n כך שלכל x, y ולכל $t \geq n$ קיימת פסילה מ- x ל- y באורך t בדיוק.

הערה. חשוב לדרוש ש- G גרף אינו מחזורי.

הוכחה. לכל $x \in V$ נתבונן ב- $\{ \text{אורכים של מסילות מ-} x \text{ ל-} x \}$. נשים לב כי L_x היא אגודה, כלומר $\forall u, v \in L_x, u + v \in L_x$ ולכן $L_x - L_x$ היא חבורה. נמשיך בשיעור הבא.

□