

הסתברות למתמטיקאים – הרצאה 14

13.4.11

נוכיח שהילוך מקרי חד ממדי הוא נשנה.

$$\sum_n p_{2n}^{(d)} < \infty$$

רוצים להראות שעבור $d = 1, 2$ זה לא עובר ≥ 3 זה כן. $p_{2n}^{(1)} \sim \frac{\text{const}}{\sqrt{n}}$. מה עם השאר? היינו ואז הסכום מתבדר. זה אנחנו יודעים ממשפט דה מואבר לפלאס. רוצים להגיד: $p_{2n}^{(d)} \sim \frac{\text{const}}{n^{d/2}}$ ואז הכל יסתדר. אפשר להשתמש במשפט הגבול המקומי במקרה n ממדי. אבל לא הוכחנו ולהוכיח זה לא פיקניק אז נחפש דרך אחרת. ראינו $p_{2n}^{(2)} = (p_{2n}^{(1)})^2 \sim (\frac{\text{const}}{\sqrt{n}})^2 \sim \frac{\text{const}}{n}$ ולכן הטור מתבדר. אז הסתדרנו עם שני הממדים הראשונים. צ"ל

$$p_{2n}^{(3)} = 6^{-2n} \binom{2n}{n} \sum_{k+l+m=n} \binom{n}{k, l, m}^2$$

ראינו כבר:

$$p_{2n}^{(1)} = 2^{-2n} \binom{2n}{n}$$

$$p_{2n}^{(3)} = \underbrace{p_{2n}^{(1)}}_{\sim \frac{\text{const}}{\sqrt{n}}} \cdot \sum_{k+l+m=n} \binom{n}{k, l, m}^2, \text{ אז,}$$

נרצה להראות $\sum_{k+l+m=n} \binom{n}{k, l, m}^2 \sim \frac{\text{const}}{n}$. (ניחוש מושכל מהנוסחא).

$$\sum \binom{n}{k, l, m}^2 \leq (\max \binom{n}{k, l, m}) (\underbrace{\sum_{k+l+m=n} \binom{n}{k, l, m}}_{=3^n})$$

מדוע? כי $(1+1+1)^n = \sum \binom{n}{k, l, m} 1^k 1^l 1^m$. נרצה להראות $\max \binom{n}{k, l, m} \leq \text{const} \frac{3^n}{n}$. קל לנחש שהמקסימום הוא באמצע, בדיוק כמו למקדמים ביונמיים: $\binom{n}{\frac{n}{3}, \frac{n}{3}, \frac{n}{3}}$.

$$\binom{n}{k, l, m} \leq \binom{n+1}{k+1, l, m}$$

כי:

$$\frac{n!}{k!l!m!} \leq \frac{(n+1)!}{(k+1)!l!m!}$$

$$:n = 3a - 1$$

$$\max \binom{3a-1}{k, l, m} \leq \max \binom{3a}{k, l, m} \leq \text{const} \frac{3^{3a}}{3a} \leq 3 \text{const} \frac{3^{3a-1}}{3a-1}$$

ובאותו אופן $n = 3a - 2$.

אז נוכל להניח $n \in 3\mathbb{Z}$. זה די ברור שהמקסימום הוא ב- $\left(\frac{n}{3}, \frac{n}{3}, \frac{n}{3}\right)$ ואז לפי סטירלינג $\leq \text{const} \frac{3^n}{n}$.

מה נעשה עם מימד 4? במימד 4 אין לנו שום טענה קומבינטורית. מה הקשר בין הילוך במימד אחד להילוך במימד אחר? הילוך דו ממדי בוחר אחד מתוך 4 הכיוונים. נטיל על הישר. אז בסיכוי $1/4$ ימינה, $1/4$ שמאלה ו- $1/2$ נשאר במקום. זה כבר לא הילוך פשוט. לכן לא ברור איך ההסתברויות קשורות. אם נטיל ככה הילוך 4 ממדי על מימד 3:

$$S_n^{(4)} = (S_{n,1}^{(n)}, S_{n,2}^{(n)}, S_{n,3}^{(n)}, S_{n,4}^{(n)}) \rightarrow (S_{n,1}^{(n)}, S_{n,2}^{(n)}, S_{n,3}^{(n)})$$

הילוך תלת ממדי אנחנו יודעים שהוא חולף. האם מזה נובע שהילוך 4 ממדי חולף? כן. אם החל ממקום מסויים הסדרה של הילוך 3 ממדי מכילה אינסוף נקודות שונות ולכן גם בהילוך 4 ממדי החל ממקום מסויים שלשה של קורדינטות החל ממקום מסויים לא תהיה $0,0,0$ ולכן לא יכול לחזור לראשית. ונימוק כזה נכון לכל מימד גדול מ-3.

$$p_{2n}^{(1)} = 2^{-2n} \binom{2n}{n}$$

מדוע? קומבינציה של $2n$ פלוסים ומינוסים כך שהסכום יהיה 0.

$$p_{2n}^{(2)} = (p_{2n}^{(1)})^2$$

לא נרצה לטיל סתם על ציר x ועל ציר y . במקום נטיל על הצירים האלכסוניים. וכאן זה בדיוק חצי חצי לכל כיוון. ואז אלה שני הילוך חד ממדיים ב"ת. לצערנו טריק כזה לא עובד במימד 3.

אז בשלושה ממדים נצטרך לעשות קומבינטוריקה אבל מסובכת. נסתכלי על וקטורי בסיס סטנדרטי e_1, e_2, e_3 . ההילוך שלנו משהו לדוגמא:

$$\underbrace{+e_2 - e_3 - e_1 + e_1 + e_2 + \dots}_{2n} = 0$$

אנחנו רוצים שכל ה- e_1 יצטמצמו, כל ה- e_2 יצטמצמו וכל ה- e_3 הצטמצמו. נתחיל מלבחור פלוסים ומינוסים. מספר הפלוסים חייב להיות כמו מספר המינוסים. לכן צריך להיות מקדם $\binom{2n}{n}$. כעת צריך לבחור איזה k פעמים e_1 מופיע. כמו כן צריך לבחור אותם מתוך n הפלוסים. צריך לבחור פעמיים מבין הפלוסים ומבין המינוסים. כעת נוכיח שהתכנסות הטור תחליט מה נשנה ומה חולף.

הגדרה. זמן החזרה: $\tau_1 = \min\{n > 0 : S_n = 0\}$. אם לא תהיה חזרה אז $+\infty$ (מינימום של קבוצה ריקה). זה זמן החזרה הראשונה.

$$\tau_2 = \min\{n > \tau_1 : S_n = 0\}$$

וכו'

$$\tau_k : \Omega \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\} \cup \{\infty\} \quad \tau_1 < \tau_2 < \dots$$

האינטואיציה אומרת שהרווחים $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \tau_3 - \tau_2$ מ"מ ב"ת ש"ה. הבעיה שאנחנו לא יכולים להוכיח את הטענה הזאת כי אנחנו אפילו לא יכולים לנסח אותה. אם $\tau_1 = \infty$ אז אנחנו בבעיה.

טענה. לכל $k, t_1, \dots, t_k \in \{1, 2, \dots\}$:

$$\mathbb{P}(\tau_1 = t_1, \tau_2 = t_1 + t_2, \dots, \tau_k = t_1 + \dots + t_k) = \mathbb{P}(\tau_1 = t_1) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(\tau_1 = t_k)$$

מה ששונה זה ש- $t_1, \dots, t_k$ לא אינסופי.