

הסתברות למתמטיקאים – הרצאה 13

6.4.11

עצירה – סקירה

שיקוף

סיימנו עם הפרק הראשון. נעבור לפרק השני, הוא פחות תורת המידה, יותר קומבינטוריקה. נחזור לדבר על הילוכים מקריים:

$$S_n = X_1 + \dots + X_n, \text{ ב"ת ש"ה, } X_n = \pm 1$$

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n+k}{2}}$$

מ"מ יותר מעניין זה $M_n = \max(S_0, S_1, \dots, S_n)$. באופן כללי אין דרך לחשב מקסימום של מ"מ תלויים. אבל במקרה זה התמזל מזלנו ונוכל לדבר על שיקוף.

טענה. לכל $m \geq 0$,

$$\mathbb{P}(M_n = m) = \mathbb{P}(S_n = m) + \mathbb{P}(S_n = m+1) = \begin{cases} 2^{-n} \binom{n}{\frac{n+k}{2}} & \text{זוגי } m+n \\ 2^{-n} \binom{n}{\frac{n+(m+1)}{2}} & \text{איזוגי } m+n \end{cases}$$

זה נותן לנו במופרש התפלגות של M_n ואפילו את הקשר בין ההתפלגות של M_n להתפלגות של S_n .

טענה. $m \geq s, m \geq 0$:

$$\mathbb{P}(S_n = s, M_n = m) = \mathbb{P}(S_n = 2m - s) - \mathbb{P}(S_n = 2m - s + 2)$$

ואפשר לכתוב גם מפורשות כמו קודם.

טענה. $a > b \geq 0$.

$$\mathbb{P}(S_1 > 0, \dots, S_{a+b} > 0 : S_{a+b} = a - b) = \frac{a-b}{a+b}$$

זה נקרא משפט ההצבעה. מדוע? נחשוב על הצבעה עם שני מועמדים, אחד יקבל a קולות ושני יקבל b קולות ומסתכלים על התוצאות בזמן אמת. וזה בדיוק הסיכוי שלאורך כל הדרך המועמד הראשון היה מעל המועמד השני. שימוש נוסף של שיקוף הוא עניין של נקודות עלייה בהילוך מקרי.

הגדרה. נקודת עלייה של הילוך מקרי היא k המקיימת $S_1, \dots, S_{k-1} < S_k$ וכן $S_{k+1}, \dots, S_n \geq S_k$. כלומר אחרי שעולים מעל S_k לא יורדים מתחת ל- S_k .

איך נשתמש בשיקוף? נסתכל על ההמשך המשוקף ואז נקודת עלייה היא בדיוק נקודת המקסימום הראשונה. ואז $1 = (\text{מספר נקודות העלייה}) \cdot \mathbb{E}$. מעניין, אבל לא נראה את זה, כי זה מסובך, זה ש- עבור m גדולים אין בכלל נקודות עלייה. איך זה מתיישב עם התוחלת? ניסוי נומרי:

מספר נקודות עלייה ELBATELBATELBAT
כלומר בדרך כלל אין נקודות עלייה, אבל אם כבר יש אז יש יותר מאחת.

נשנות

נדבר על הילוך מקרי דו ממדי, תלת ממדי.
בהילוך מקרי דו ממדי הולכים למעלה בסיכוי $\frac{1}{4}$, שמאלה בסיכוי $\frac{1}{4}$, ימינה בסיכוי $\frac{1}{4}$ ולמטה בסיכוי $\frac{1}{4}$.
כלומר:

$$X_n = \begin{cases} (1, 0) & 1/4 \\ (-1, 0) & 1/4 \\ (0, 1) & 1/4 \\ (0, -1) & 1/4 \end{cases}$$

מ"מ ב"ת ש"ה ואז ההילוך המקרי הוא $S_n = X_1 + \dots + X_n$. ובאותו אופן אפשר להגדיר הילוך מקרי d ממדי.

משפט. Polya עבור $d = 1, 2$, נישני, כלומר חוזר ל- 0 אינסוף פעמים (כ"ב).
עבור $d = 3, 4, \dots$ חולף, כלומר חוזר ל- 0 רק מספר סופי (ואולי אפילו 0) של פעמים (כ"ב).

ראשית נסמן,

$$P_{2n}^{(d)} = \mathbb{P}(S_{2n}^{(d)} = 0)$$

ההוכחה של המשפט מבוססת על שתי הטענות הבאות:

טענה.

$$p_{2n}^{(1)} = 2^{-2n} \binom{2n}{n}$$

$$p_{2n}^{(2)} = (p_{2n}^{(1)})^2 = 2^{-4n} \binom{2n}{n}^2$$

$$p_{2n}^{(3)} = 6^{-2n} \binom{2n}{n} \sum_{k+l+m=n} \binom{n}{k, l, m}^2 \neq (p_{2n}^{(1)})^3$$

כאשר:

$$\binom{n}{k, l, m} = \frac{n!}{k!l!m!}$$

זה החלק הקובינטורי. החלק האנליטי הוא טענה הבאה (שנכונה להילוך מקרי שרירותי, לאו דווקא פשוט)

טענה. יהיו $X_1, \dots$ וקטורים מקריים d ממדיים, ב"ת ש"ה ו- $S_n = X_1 + \dots + X_n$ אז הטענות הבאות שקולות:

1. כ"ב S_n מתאפס לפחות פעם (עבור $n = 1, 2, 3, \dots$).

2. כ"ב S_n מתאפס אינסוף פעמים.

3. $\sum_n \mathbb{P}(S_n = 0) = \infty$.

שרשראות מרקוב

לא נגדיר מה זה במקום זה נדבר על דוגמא טיפוסית שהיא הילוך מקרי בגרף. נניח $G = (V, E)$ גרף מכוון קשיר חלש (כלומר הגרף הלא מכוון המתאים הוא קשיר) ו- k -רגולרי (מכל קודקוד, k צלעות יוצאות ממנו ו- k צלעות נכנסות אליו). נניח $|V| = m$ ונניח גם שהוא לא מחזורי, כלומר לא קיים $p = 2, 3, \dots$ כך שאורך של כל מסלול סגור מתחלק ב- p .

מה זה הילוך מקרי על גרף כזה? כשנמצאים בקודקוד בוחרים באקראי לאיזו צלע להמשיך ללכת. נמשיך לסמן את ההילוכים ב- S_n .

טענה. לכל x ,

$$\mathbb{P}(S_n = x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m}$$

לא משנה איפה מתחילים אחרי מספיק צעדים נמצאים באופן אחיד בכל הגרף. וזה מקרה פרטי של משפט ההתכנסות של שרשראות מרקוב. כעת נתבונן בזמן בחזרה הראשונה לקודקוד ההתחלתי x_0 .

טענה. תוחלת זמן החזרה הראשונה ל- x_0 היא שווה m .

בטענה הראשונה חשוב שהגרף יהיה לא מחזורי, הטענה השנייה נכונה גם עבור גרף מחזורי.

עצירה – הוכחות

שיקוף

נתחיל עם הילוך מקרי חד ממדי ונלך לכיוון עקרון השיקוף. $S_n = X_1 + \dots + X_n$ הילוך מקרי חד ממדי פשוט. $M_n = \max(S_0, \dots, S_n)$.

למה.

$$\mathbb{E}(f(S_n - m) \mathbb{1}_{M_n \geq m}) = 0$$

לכל פונקציה איזוגיות f ולכל $m = 0, 1, 2, \dots$

כלומר זאת סימטריה של ההתפלגות.

למה לא כתבנו תוחלת מותנית? כי אז צריך לוודא שיש סיכוי גדול מ-0 שזה מתקיים וככה אפשר לא לדרוש.

הוכחה. $m = 0$ מקרה טריויאלי: כי אז $\mathbb{1}_{M_n \geq m} = 1$ ואז זה סימטרי של התפלגות של S_n . אם $m > 0$ נגדיר מאורעות $A_k = \{S_1 < m, \dots, S_{k-1} < m, S_k = m\}$ כלומר לראשונה הגענו לגובה m . עשינו עבר משהו כזה כשהוכחנו את אי שוויון קולמגורוב. המאורעות זרים, ו-

$$A_1 \uplus A_2 \uplus \dots \uplus A_n = \{M_n \geq m\}$$

$$\mathbb{1}_{M_n \geq m} = \mathbb{1}_{A_1} + \dots + \mathbb{1}_{A_n}$$

לכן מספיק להוכיח:

$$\mathbb{E}(f(S_n - m) \mathbb{1}_{A_k}) = 0$$

$$B_k = \{(x_1, \dots, x_k) \in \{-1, 1\}^k \mid x_1 < m, x_1 + x_2 < m, \dots, x_1 + \dots + x_k = m\}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(S_n - m) \mathbb{1}_{A_k}) &= \\ &= \sum_{x_1, \dots, x_n = \pm 1} 2^{-n} f(x_1 + \dots + x_n - m) \mathbb{1}_{B_k}(x_1, \dots, x_k) = \\ &= 1 \sum_{x_1, \dots, x_k} \mathbb{1}_{B_k}(x_1, \dots, x_k) \sum_{x_{k+1}, \dots, x_n} f(\underbrace{x_1 + \dots + x_n}_{x + 1 + \dots + x_k - m} = m) = 0 \end{aligned}$$

□

לכן הוכחנו $\mathbb{E}(f(S_n - m) \mathbb{1}_{M_n \geq m}) = 0$ אז $\mathbb{E}(f(S_n - m) \mathbb{1}_{M_n < m}) = \mathbb{E}f(S_n - m)$

$$f(s) = \text{sign } s = \begin{cases} 1, & s > 0 \\ 0 & s = 0 \\ -1 & s < 0 \end{cases}$$

ואז:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\text{sign}(S_n - m) \mathbb{1}_{M_n < m}) &= \\ &= \mathbb{E} \text{sign}(S_n - m) - \mathbb{P}(M_n < m) = \mathbb{P}(S_n > m) - \mathbb{P}(S_n < m) \end{aligned}$$

נסיק למה:

למה.

$$\mathbb{P}(M_n < m) = \mathbb{P}(S_n < m) - \mathbb{P}(S_n > m)$$

כעת נוכל לחשב ממש:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_n = m) &= \mathbb{P}(M_n < m+1) - \mathbb{P}(M_n < m) = \\ &= \mathbb{P}(S_n < m+1) - \mathbb{P}(S_n > m+1) - \mathbb{P}(S_n < m) + \mathbb{P}(S_n > m) = \\ &= \mathbb{P}(S_n = m) + \mathbb{P}(S_n = m+1)\end{aligned}$$

כעת,

$$\mathbb{P}(M_n < m, S_n = m-c) = ?$$

ניקח $f = 0$, $f(c) = -1$, $f(-c) = 1$ אחרת.
נציב בנוסחה:

$$\mathbb{E}(f(S_n - m) \mathbb{1}_{M_n < m}) = \mathbb{E}f(S_n - m)$$

נקבל:

$$\mathbb{P}(M_n < m, S_n = m-c) = \mathbb{P}(S_n = m-c) - \mathbb{P}(S_n = m+c)$$

כעת אם $k < m$,

$$\mathbb{P}(M_n < m, S_n = k) = \mathbb{P}(S_n = k) - \mathbb{P}(S_n = 2m-k)$$

כעת,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_n = m, S_n = k) &= \mathbb{P}(M_n < m+1, S_n = k) - \mathbb{P}(M_n < m, S_n = k) = \\ &= \mathbb{P}(S_n = k) - \mathbb{P}(S_n = 2(m+1)-k) - \mathbb{P}(S_n = k) + \mathbb{P}(S_n = 2m-k) = \\ &= \mathbb{P}(S_n = 2m-k) - \mathbb{P}(S_n = 2m-k+2)\end{aligned}$$

נעבור למשפט ההצבעה.

למה. $c \geq 0$:

$$\mathbb{P}(S_1 < 0, \dots, S_n < 0, S_n = -c) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_{n-1} = c-1) - \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_{n-1} = c+1)$$

הוכחה. $c = 0$ טריוויאלי. אם $c > 0$:

$$(X_2, \dots, X_n) \sim (X_1, \dots, X_{n-1})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_1 < 0, \dots, S_n < 0, S_n = -c) &= \\ &= \mathbb{P}(S_1 = -1, S_2 - S_1 \leq 0, \dots, S_n - S_1 \leq 0, S_n - S_1 = -c + 1) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(\underbrace{S_1 \leq 0, \dots, S_{n-1} \leq 0}_{M_{n-1} < 1}, S_{n-1} = -c + 1) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(S_{n-1} = -c + 1 - \mathbb{P}(S_{n-1} = c + 1)) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(S_{n-1} = c - 1 - \mathbb{P}(S_{n-1} = c + 1)) \end{aligned}$$

□

מצד שני,

$$\mathbb{P}(S_1 < 0, \dots, S_n < 0, S_n = -c) = \mathbb{P}(S_1 > 0, \dots, S_n > 0, S_n = c)$$

נבחר: $c = a - b, n = a + b$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_1 > 0, \dots, S_{a+b} > 0 | S_{a+b} = a - b) &= \\ &= \frac{\mathbb{P}(S_1 > 0, \dots, S_{a+b} > 0, S_{a+b} = a - b)}{\mathbb{P}(S_{a+b} = a - b)} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\mathbb{P}(S_{a+b-1} = a - b - 1) - \mathbb{P}(S_{a+b-1} = a - b + 1)}{\mathbb{P}(S_{a+b} = a - b)} = \\ &= \frac{\binom{\frac{a+b-1}{2} \pm \frac{a-b-1}{2}} - \binom{\frac{a+b-1}{2} \pm \frac{a-b+1}{2}}}{\binom{\frac{a+b}{2} \pm \frac{a-b}{2}}} = \\ &= \frac{\binom{a+b-1}{a-1} - \binom{a+b-1}{a}}{\binom{a+b}{a}} = \frac{\frac{(a+b-1)!}{(a-1)!b!} - \frac{(a+b-1)!}{a!(b-1)!}}{\frac{(a+b)!}{a!b!}} = \frac{\frac{1}{1-b} - \frac{1}{a-1}}{\frac{a+b}{a-b}} = \\ &= \frac{ab}{a+b} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) = \frac{a-b}{a+b} \end{aligned}$$

אז הוכחנו את משפט ההצבעה.

$$\begin{aligned} B_k = , A_k = \{S_1 < S_k, \dots, S_{k-1} < S_k, S_{k+1} \geq S_k, \dots, S_n \geq S_k\} \\ \{S_1 < S_k, \dots, S_{k-1} < S_k, S_{k+1} \leq S_k, \dots, S_n \leq S_k\} \end{aligned}$$

אז

$$\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(B_k)$$

מפני שנכתוב כסכום:

$$\sum_{x_1, \dots, x_k} 1_{x_1, \dots, x_k} \sum_{x_k, \dots, x_n} 1(\dots)$$

האינדקטור הראשון זהה, האינדקטור השני הוא בדיוק המיונס של האינדקטור הראשון, אבל מיונס לא משנה הסתברות. מה מבטא סכום האינדקטורים:

$$\mathbb{1}_{A_1} + \dots + \mathbb{1}_{A_k} = \text{מספר נקודות העלייה}$$

$$\mathbb{1}_{B_1} + \dots + \mathbb{1}_{B_k} = 1 = \text{מספר נקודות המקסימום הראשון}$$

אבל $\mathbb{E}\mathbb{1}_{A_i} = \mathbb{E}\mathbb{1}_{B_i}$ ולכן סכום התוחלות שווה לסכום התוחלות ולכן שווה לתוחלת של 1 שזה 1.