

הסתברות למתמטיקאים – הרצאה 11

4.4.11

ממשיכים עם הוכחת החוק החזק.
היו לנו משתנים מקריים X_n , ב"ת, ש"ה אינטגרבייליים ועברנו למ"מ $Y_n = X_n \cdot \mathbb{1}_{[-n,n]}(X_n)$.
נותר לנו להראות:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \frac{Y_n^2}{n^2} < \infty$$

אם ל- X_n יש מומנט שני אז ברור שהתוחלת של Y_n סופית אבל אז בכלל לא היינו צריכים את כל החישובים האלה. לכעורה אין שום סיבה שהטור יהיה סופי. אבל בכל זאת.

$$\mathbb{E} Y_n^2 = \mathbb{E} X_n^2 \mathbb{1}_{[-n,n]}(X_n) = \mathbb{E} X^2, \mathbb{1}_{[-n,n]}(X_1)$$

כי המ"מ X_n הם שווי התפלגות.
נכתוב:

$$\frac{1}{n^2} \mathbb{E} Y_n^2 = \frac{1}{n^2} \mathbb{E} X_n^2 \mathbb{1}_{[-n,n]}(X_n) = \frac{1}{n^2} \mathbb{E}(X^2, \mathbb{1}_{[-n,n]}(X_1))$$

ואז די להראות:

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{n}$$

נבחין כי:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{k^2} \mathbb{1}_{[-k,k]}(x) \leq 2|x|$$

ואז

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \frac{Y_n^2}{n^2} \leq 2 \mathbb{E}|X_1| < \infty$$

מדוע ההבחנה?
יהי $x \in (n-1, n]$ אז

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{k^2} \mathbb{1}_{[-k,k]}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^2}{k^2} =$$

ואכן,

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots \right)$$

שווה לאינטגרל של $\frac{1}{x^2}$ מ- n עד $n+1$ הפונקציה גדולה מ- $\frac{1}{(n+1)^2}$ וכו'. לכן,

$$\frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots \right) \leq \frac{1}{n^2} + \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \leq \frac{2}{n}$$

וכמובן

$$\frac{2}{n} \leq \frac{2}{x}$$

סיימנו את ההוכחה עד כדי הוכחת משפט קולמגורוב. נוכיח את הטענה החזקה של גליונקו קנטלי.

$$\sup_{\mathbb{R}} |F_n(\cdot) - F(\cdot)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

כ"ב.

רוב ההוכחה דומה להוכחת הטענה החלשה. ראינו שאפשר לחלק את $\mathbb{R}$ לנקודות $x_1, x_2, \dots, x_m$ כך ש- $x_{i+1} - x_i$ וכדי להוכיח ש-

$$\sup_{\mathbb{R}} |F_n() - F()| \leq 3\varepsilon$$

היה מספיק להראות

$$|\mu_n((-\infty, x_k)) - \mu((-\infty, x_k))| \leq \varepsilon$$

$$|\mu_n((-\infty, x_k]) - \mu((-\infty, x_k])| \leq \varepsilon$$

לא היה כאן שום הסתברות אלא הוחנו רק על סמך מונטוניות. לכן החלק הזה עדיין נכון. עכשיו על סמך החוק החזק נאמר ש

$$|\mu_n((-\infty, x_k)) - \mu((-\infty, x_k))| \leq \varepsilon$$

$$|\mu_n((-\infty, x_k]) - \mu((-\infty, x_k])| \leq \varepsilon$$

כ"ב החל ממקום מסויים בקבוצה $A_n = \{\omega : X_n < x_k\}$ ועל סמך החוק החזק:

$$\frac{1}{n} \sum_1^n \mathbb{1}_{A_k} \xrightarrow{\text{כ"ב}} \mu((-\infty, x_k))$$

עדיין נשאר לבדוק:

$$\forall \varepsilon > 0 \mathbb{P}(\text{החל ממקום מסויים מתקיים}) = 1$$

שזה גורר

$$\mathbb{P}(\forall \varepsilon > 0 \text{ מתקיים מסויים}) = 1$$

וזה כי מדובר במספק בן מניה של מאורעות.
נוכיח עכשיו את אי-שוויון קולמגורוב:

טענה. יהיו $X_1, \dots, X_n$ מ"מ ב"ת כך ש- $\mathbb{E}X_1 = 0, \dots, \mathbb{E}X_n = 0$,
 $\mathbb{E}X_1^2 < \infty, \dots, \mathbb{E}X_n^2 < \infty$. נסמן $S_k = X_1 + \dots + X_k$. אז לכל $c > 0$:

$$\mathbb{P}(\max_{k=1, \dots, n} |S_k| \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}S_n^2}{c^2}$$

הערה. אם לא נדרוש $\mathbb{E}X_1^2 < \infty, \dots, \mathbb{E}X_n^2 < \infty$ אז השוויון הוא טריוויאלי כי באגף ימין יש אינסוף.

וזה מדהים כי אי שוויון צ'בישב מבטיח ש-

$$\mathbb{P}(|S_k| \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}S_k^2}{c^2} \leq \frac{\mathbb{E}S_n^2}{c^2}$$

בפרט,

$$\max_{k=1, \dots, n} \mathbb{P}(|S_k| \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}S_k^2}{c^2} \leq \frac{\mathbb{E}S_n^2}{c^2}$$

וזה מדהים שהצלחנו להכניס את המקסימום לתוך ההסתברות. נוכל להסיק עוד אי שוויון טריוויאלי:

$$\mathbb{P}(\max_{k=1, \dots, n} |S_k| \geq c) \leq \sum_k \mathbb{P}(|S_k| \geq c) \leq \sum_k \frac{\mathbb{E}S_k^2}{c^2}$$

לכן ברור עוד יותר עד כמה קולמגורוב הרבה יותר טוב.
נצטרך להפעיל שיטה שנקראת עצירה ועל זה נדבר בהרחבה בחלק השני של הקורס.
נוכיח פעמיים. מדוע? כי קל להבין את ההוכחה במקרה הבדיד.
מקרה בדיד:

הוכחה.

$$\mathbb{E}(S_n | X_1, \dots, X_k) = S_k$$

כי עד k אנחנו יודעים והשאר לא תלוי בהם והתוחלת של 0. לכן,

$$\mathbb{E}(S_n^2 | X_1, \dots, X_k) \geq S_k^2$$

מדוע? כי קודם כל $\mathbb{E}x^2 \geq (\mathbb{E}x)^2$ (ההפרש אפילו נקרא שונות וזה מקרה פרטי של אי שוויון יאנסן). מה לגבי תוחלת מותנית? כי אפשר לחשוב על התנאים כצמצום מרחב התסברות לקבוצה קטנה יותר תוך נירמול מידת ההסתברות. בפרט נקבל מרחב הסתברות חדש.
נגדיר מאורעות

$$A_k = \{|S_1| < c, \dots, |S_{k-1}| < c, |S_k| \geq c\}$$

למה זה נקרא עצירה? אפשר לחשוב על זה כהתבוננות בתהליך מקרי עד שמגיע לראשונה קבוע ואז עוצרים אותו וחושבים מה יהיה איתו הלאה. המאורעות האלה זרים כי רק פעם אחת אפשר לעבור את הסף לראשונה.

$$A_1 \cup \dots \cup A_n = \{\max_k |S_k| \geq c\}$$

עכשיו:

$$\mathbb{E}(S_n^2 | A_k) \geq \mathbb{E}(S_k^2 | A_k)$$

מפני:

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(S_n^2 | X_1, \dots, X_k) \middle| A_k\right) \geq \mathbb{E}(S_k^2 | A_k) \geq c^2$$

ואפילו יותר טוב:

$$\mathbb{E}(S_n^2 \mathbb{1}_{A_k}) \geq \mathbb{E}(S_k^2 \mathbb{1}_{A_k}) \geq c^2 \mathbb{P}(A_k)$$

כי ככה לא מסתקנים.

$$\sum_k \mathbb{E}(S_n^2 \mathbb{1}_{A_k}) \geq \sum_k \mathbb{E}(S_k^2 \mathbb{1}_{A_k})$$

לכן,

$$\mathbb{E}(S_n^2 \mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_n}) \geq c^2 \mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n)$$

ואז

$$\mathbb{E}(S_n^2) \geq c^2 \mathbb{P}(\max_k |S_k| \geq c)$$

□

מקרה כללי:

הוכחה. כאן לא ברור מה זה התנאי רציפה. מה שכן נגדיר:

$$A_k = \{|S_1| < c, \dots, |S_{k-1}| < c, |S_k| \geq c\}$$

עדיין נכון ש-

$$A_1 \cup \dots \cup A_n = \{\max_k |S_k| \geq c\}$$

אבל עכשיו כדי לטפל במ"מ כלליים נגדיר $B_k \subseteq \mathbb{R}^k$

$$B_k = \{(x_1, \dots, x_k) : |x_1| < c, |x_1 + x_2| < c, \dots, |x_1 + \dots + x_{k-1}| < c, |x_1 + \dots + x_k| \geq c\} \subseteq \mathbb{R}^k$$

רוצים למצוא משהו בסגנון

$$\mathbb{E}(S_n^2 \mathbb{1}_{A_k}) \geq c^2 \mathbb{P}(A_k)$$

ומפה אנחנו נסתדר בדיוק כמו במקרה בדיד. אבל בשביל זה השתמשנו בהתנאים. עכשיו נשתמש באינטגרלים:

$$\mathbb{E}(S_n^2 \mathbb{1}_{A_k}) = \int (x_1 + \dots + x_n)^2 \mathbb{1}(x_1, \dots, x_k) \mu_1(dx_1) \dots \mu_n(dx_n)$$

כי באופן סמלי $\mathbb{E}(S_n^2 \mathbb{1}_{A_k})$ זאת פונקציה ב- $x_1, \dots, x_n$. נעשה פוביני: נרצה את האינטגרציה הפנימית בעתיד כי העבר כבר עבר בזמן העצירה ואז עושים אינטגרציה על כל אפשרויות העתיד.

$$\begin{aligned} & \int (x_1 + \dots + x_n)^2 \mathbb{1}(x_1, \dots, x_k) \mu_1(dx_1) \dots \mu_n(dx_n) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \mu_1(dx_1) \dots \mu_k(dx_k) \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \mu_{k+1}(dx_{k+1}) \dots \mu_n(dx_n) (x_1 + \dots + x_n)^2 \mathbb{1}_{B_k}(x_1, \dots, x_k) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \mu_1(dx_1) \dots \mu_k(dx_k) \mathbb{1}_{B_k}(x_1, \dots, x_k) \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \mu_{k+1}(dx_{k+1}) \dots \mu_n(dx_n) (x_1 + \dots + x_n)^2 \end{aligned}$$

נסמן ב- a את מה שקבוע באינטגרציה, או בשפת ההסתברות מה שכבר ידוע או לחלופין $a = S_k$.

$$\begin{aligned} & \int (a + x_{k+1} + \dots + x_n)^2 \mu_{k+1}(dx_{k+1}) \dots \mu_n(dx_n) = \\ &= \int a^2 + 2a(x_{k+1} + \dots + x_n) + (x_{k+1} + \dots + x_n)^2 \mu_{k+1}(dx_{k+1}) \dots \mu_n(dx_n) = \\ &= \int a^2 \mu_{k+1}(dx_{k+1}) \dots \mu_n(dx_n) + \underbrace{\int 2a(x_{k+1} + \dots + x_n) \mu_{k+1}(dx_{k+1}) \dots \mu_n(dx_n)}_{=0} + \\ & \quad + \underbrace{\int (x_{k+1} + \dots + x_n)^2 \mu_{k+1}(dx_{k+1}) \dots \mu_n(dx_n)}_{\geq 0} \geq a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^k} \mu_1(dx_1) \dots \mu_k(dx_k) \mathbb{1}_{B_k}(x_1, \dots, x_k) \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \mu_{k+1}(dx_{k+1}) \dots \mu_n(dx_n) (x_1 + \dots + x_n)^2 \geq \\ & \geq \int_{B_k} \mu_1(dx_1) \dots \mu_k(dx_k) \underbrace{(x_1 + \dots + x_k)^2}_{\geq c^2} \geq c^2 \mathbb{P}(A_k) \end{aligned}$$

□

כמו שרצינו.

כעת בעזרת אי השוויון נוכל להוכיח את משפט קולמגרוב.

משפט. X_n מ"מ ב"ת $\mathbb{E}X_n = 0$, $\sum \mathbb{E}X_1^2 < \infty$ אז $\sum X_n$ מתכנס כ"ב.

הוכחה. נגדיר $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ונוכיח שזאת סדרת קושי כ"ה. כלומר נוכיח ש-

$$\sup_{k,l \geq n} |S_k - S_l| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{כ"ב}$$

באופן שקול נשאל האם

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |S_k - S_l| = 0 \quad \text{כ"ב}$$

מספיק:
לכל ε

$$\mathbb{P}(\sup |S_k - S_l| \geq 2\varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

מספיק:

$$\mathbb{P}(\sup_{k \geq n} |S_k - S_n| \leq \varepsilon) \rightarrow 1$$

כי אז נובע ש-

$$\mathbb{P}(\sup_{k,l \geq n} |S_k - S_l| \leq 2\varepsilon) \rightarrow 1$$

שזה שקול ל-

$$\mathbb{P}(\sup_k |S_{n+k} - S_n| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\mathbb{P}(\sup_k |S_{n+k} - S_n| \geq \varepsilon) = \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{\mathbb{P}(\max_{k=1,2,\dots,m} |S_{n+k} - S_n| > \varepsilon)}_{\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}(S_{n+m} - S_n)^2 \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^m \mathbb{E}X_{n+k}^2}$$

אז

$$\mathbb{P}(\max_{k=1,2,\dots,m} |X_{n+1} + \dots + X_{n+k}| \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}(X_{n+1} + \dots + X_{n+m})^2}{c^2}$$

בגלל שהמ"מ אורתוגונליים:

$$\text{Var}(X_{n+1} + \dots + X_{n+m}) = \text{Var}(X_{n+1}) + \dots + \text{Var}(X_{n+m})$$

אז

$$\frac{\mathbb{E}(X_{n+1} + \dots + X_{n+m})^2}{c^2} = \frac{\mathbb{E}X_{n+1}^2 + \dots + \mathbb{E}X_{n+m}^2}{c^2}$$

ולכן

$$\mathbb{P}(\sup_k |S_{n+k} - S_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_n^{\infty} \mathbb{E} X_k^2$$

□

מכאן בפרט נובעת התכנסות כ"ב של $\sum_n \frac{\pm 1}{n}$.
עכשיו נדבר על חוקי 1-0.

לפני זה נדבר על שדות סיגמא. זה אולי מוכר תחת השם סיגמא אלגברה.
 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מרחב הסתברות. תת-שדה σ $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}$, ε מכיל קבוצות זניחות).
מ"מ $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ יוצר שדה- σ $\sigma(X) = \sigma$,

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B) : B \text{ קבוצת בורל ב-}\mathbb{R}\}$$

עד כדי קבוצות זניחות. אפשר לאמר שזה שדה- σ הקטן ביותר שעושה X מדיד. $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\sigma(X, Y) = \{(X, Y)^{-1}(B) : B \text{ קבוצת בורל ב-}\mathbb{R}^2\}$$

וזה מסומן גם

$$\sigma(X, Y) = \sigma(X) \vee \sigma(Y)$$

שדה- σ מוצר ע"י $\sigma(X) \vee \sigma(Y)$.