

## הסתברות למתמטיקאים – הרצאה 10

30.03.11

עם כל הכלים שהוכחנו נוכל בקלות להסתדר עם מספרים נורמליים. מלמות של בורל קנטלי נוכל להכניס את הכמות פנימה.

$\alpha_k \in \{0, 1, \dots, 9\}, [0, 1) \ni x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{10^k}$   
נרצה להראות למשל:

$$\frac{\#\{k \leq n : \alpha_k = 6, \alpha_{k+1} = 2\}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{100}$$

אמנם כל הספרות הם מ"מ ב"ת ש"ה אבל זוגות של ספרות הן כן תלויות. אבל נוכל לטפל בזה. נפריד למקרים:

$$\frac{\#\{k : 2k - 1 \leq n, \alpha_{2k-1} = 6, \alpha_{2k} = 2\}}{n} \rightarrow \frac{1}{200}$$

$$\frac{\#\{k : 2k \leq n, \alpha_{2k} = 6, \alpha_{2k+1} = 2\}}{n} \rightarrow \frac{1}{200}$$

באופן שקול,

$$\frac{\#\{k : 2k - 1 \leq n, \alpha_{2k-1} = 6, \alpha_{2k} = 2\}}{\#\{k : 2k - 1 \leq n\}} \rightarrow \frac{1}{100}$$

$$\frac{\#\{k : 2k \leq n, \alpha_{2k} = 6, \alpha_{2k+1} = 2\}}{\#\{k : 2k \leq n\}} \rightarrow \frac{1}{100}$$

כי  $\#\{k : 2k - 1 \leq n\}$  זה בערך  $n/2$ .  
באותו אופן בדיק עבור שלשות, רביעות, וכו'. כלומר כל קומבינציה מופיעה בשכיחות נכונה ולכן זאת נורמליות.  
עוד נשאר לנו לדבר על טורים  $\sum \frac{\pm 1}{n}$  אבל על זה נדבר בהמשך עם משפט חזק יותר. כנ"ל לגבי חוק  $0 - 1$ .

### משתנים מקריים

עוד לא הוכחנו את משפט קולגמגורוב:

**משפט.** שאם  $X_n$  פ"מ ב"ת,  $\mathbb{E}X_n = 0$ ,  $\sum \text{Var } X_n < \infty$  אז  $\sum_n X_n$  מתכנס כ"ב.

אבל נניח שהוכחנו וננסה להוציא ממנו חוק חזק:

**משפט.**  $X_n$  מ"מ ב"ת ש"ה:

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{\text{ב"ג}} \mathbb{E}X_1$$

אולי כבר הוחנו את זה? כן. אבל הנחנו שמומנט רביעי קיים. בפועל זה מוזר כי למה אנחנו צריכים את זה? נראה הוכחה כללית יותר. נתחיל עם למה יפה, לא מובנת מאליה אבל לא מתורת ההסתברות: הלמה של פרולינקר: זה יגשר יופי בין התכנסות טורים במשפט קולמגורוב להתכנסות סכום בחוק החזק.

**למה.** לכל סדרה  $x_n \in \mathbb{R}$  אם  $\sum \frac{x_n}{n}$  מתכנס אז  $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \rightarrow 0$ .

הסכום החלקי של הטור הוא בכלל  $S_n = \frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \dots + \frac{x_n}{n}$  ואנחנו רוצים להוכיח על  $\frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \dots + \frac{x_n}{n}$  ובכלל לא טריוויאלי לעבור בין השניים.

הוכחה. נסמן  $y_n = \frac{x_n}{n}$ . מתכנס  $\sum y_n$  ואז  $x_n = ny_n$

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \frac{y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n}{n}$$

והשאלה היא האם זה שואף ל-0.

נגדיר:  $S_n = y_1 + \dots + y_n$ , אז  $S_n \rightarrow S$ .  $S_0 = 0$ .  $y_n = S_n - S_{n-1}$ . נכתוב מחדש:

$$\frac{y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n}{n} = \frac{(S_1 - S_0) + 2(S_2 - S_1) + \dots + n(S_n - S_{n-1})}{n} = \frac{-S_1 - S_2 - \dots - S_{n-1} - nS_n}{n} = S_n - \frac{S_1 + \dots + S_{n-1}}{n}$$

וברור:

$$S_n - \frac{S_1 + \dots + S_{n-1}}{n} \rightarrow S - S = 0$$

זה התכנסות לפי צ'זארו.

□

איך היינו צריכים לדעת שצריך את הלמה, לא ברור. בכלל זה אמיץ להוכיח חוק חזק עם הלמה של קולמגורוב כי הוא מדבר על שונויות, ממונט שני, ואין שום דבר כזה בחוק החזק.

**משפט.**  $X_n$  מ"מ ש"ה ב"ת,  $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ ,

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{\text{ב"ג}} \mathbb{E}X_1$$

הוכחה. מהלמה, מספיק להראות  $\sum \frac{X_n - \mathbb{E}X_1}{n}$  מתכנס כ"ב. היינו רוצים להציב במשפט קולמגורוב אבל אין לנו ממונט שני. היינו רוצים להשתמש כמו בחוק החלק בקירוב שיש לו ממונט שני אבל זה לא יילך כי אפילו אם הקירוב יתכנס כ"ב לא ינבע שהמקור יתכנס כ"ב כי יש את הדוגמא של מטיילים הלך ושוב למרות שהנורמה ב- $L_1$  קטנה.  $\text{asddsasdsadsadsadsada}$  מה שנעשה זה נחתוך את המ"מ ככה:

$$Y_n = X_n \cdot \mathbb{1}_{(-n,n)}(X_n)$$

ככל שהמספר הגדול יותר, נקרב טוב יותר. הבעיה שעכשיו  $Y_n$  הם לא ש"ה. אבל,

$$X_n - Y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{כ"ב}$$

מהלמה הראשונה של בורל קנטלי, מפני

$$\sum_n \mathbb{P}(Y_n \neq X_n) < \infty$$

כי  $\mathbb{P}(Y_n \neq X_n) = \mathbb{P}(|X_n| > n) = \mathbb{P}(|X_1| > 1)$  ואז כי סכום כזה הוא פוקנצית מדרגות  $\sum_n \mathbb{P}(Y_n \neq X_n) \leq \mathbb{E}|X_1| < \infty$ . אז מלמה של בורל קנטלי מספר סופי של מאורעות כאלה מתרחשים כ"ב כלומר ממקום מסויים  $X_n - Y_n = 0$ . אז גם  $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n} \xrightarrow{n} 0$  מדוע? מהתכנסות לפי צ'זרו. כעת מהלמה מספיק

$$\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n} \xrightarrow{\text{כ"ב}} \mathbb{E}X_1$$

נגדיר:

$$Z_n = Y_n - \mathbb{E}Y_n$$

אבל  $\mathbb{E}Y_n$  תלויה ב- $n$  אבל ממשפט ההתכנסות הדומננטית:  $\mathbb{E}Y_n \rightarrow \mathbb{E}X_1$  כעת,

$$\frac{Z_1 + \dots + Z_n}{n} = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n} - \frac{\mathbb{E}Y_1 + \dots + \mathbb{E}Y_n}{n} \rightarrow -\mathbb{E}X_1$$

שוב מהתכנסות צ'זרו: מספיק:

$$\frac{Z_1 + \dots + Z_n}{n} \xrightarrow{n} 0$$

עכשיו מספיק להוכיח  $\sum \frac{Z_n}{n}$  מתכנס כ"ב. זה טור של מ"מ ב"ת בעלי תוחלת אפס עם מומנט שני. עכשיו לפי משפט קולמגורוב מספיק להוכיח

$$\sum \text{Var}\left(\frac{Z_n}{n}\right) < \infty$$

$$\text{Var}\left(\frac{Z_n}{n}\right) = \text{Var}\left(\frac{Y_n}{n}\right) \leq \mathbb{E}\left(\frac{Y_n}{n}\right)^2$$

כי

$$\text{Var } X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)$$

□

$$\sum \frac{1}{n^2} \mathbb{E}Y_n^2 < \infty \quad \text{כלומר מספיק}$$