

$$\sqrt{d} = [\sqrt{d}] + \frac{1}{\theta_1}$$

אם d חזק, נקרא θ_1 נורמל

$$a_{n+1} = [\theta_{n+1}] + \frac{1}{\theta_{n+2}}$$

וכן, θ_{n+1}

$$\theta_{n+1} = \sqrt{d} + c = [\sqrt{d}] + c + \frac{1}{\theta_1} =$$

$$= [\sqrt{d} + c] + \frac{1}{\theta_1} = [\theta_{n+1}] + \frac{1}{\theta_1}$$

$$\theta_{n+2} = \theta_1$$

$$\sqrt{d} = [a_0, a_1, \dots, a_m] - c$$

נניח m זוגי, המינימום של $x^2 - dy^2 = 1$ הוא (p, q) כאשר p אי-זוגי, q זוגי. נניח m אי-זוגי, המינימום של $x^2 - dy^2 = 1$ הוא (p, q) כאשר p זוגי, q אי-זוגי.

המינימום של $x^2 - dy^2 = 1$ הוא (p, q) כאשר p אי-זוגי, q זוגי.

המינימום של $x^2 - dy^2 = 1$ הוא (p, q) כאשר p זוגי, q אי-זוגי.

המינימום של $x^2 - dy^2 = 1$ הוא (p, q) כאשר p אי-זוגי, q זוגי.

המינימום של $x^2 - dy^2 = 1$ הוא (p, q) כאשר p זוגי, q אי-זוגי.

$$\sqrt{d} = \frac{p_{n+1}\theta_{n+2} + p_n}{q_{n+1}\theta_{n+2} + q_n} =$$

$$\theta_{n+2} = \theta_1 \Rightarrow \frac{p_{n+1}\theta_1 + p_n}{q_{n+1}\theta_1 + q_n} = \frac{p_{n+1} + p_n(\sqrt{d} - a_0)}{q_{n+1} + q_n(\sqrt{d} - a_0)} =$$

$$a_0 = [\sqrt{d}] \begin{cases} \sqrt{d} - a_0 + \frac{1}{\theta_1} \\ \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{d} - a_0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{d}(q_{n+1} + q_n(\sqrt{d} - a_0)) = p_{n+1} + p_n(\sqrt{d} - a_0) \Rightarrow \sqrt{d}(q_{n+1} - a_0q_n - p_n) = -dq_n + p_{n+1} - a_0p_n$$

$$\begin{cases} a_0 = \frac{p_{n+1} - p_n}{q_n} \\ -dq_n + p_{n+1} - a_0p_n = 0 \end{cases}$$

$$-dq_n^2 + p_{n+1}q_n - p_n^2 = 0$$

$$p_n^2 - dq_n^2 = (-1)^{n+1}$$

משפט 1.3.1. $\sqrt{d} = [2, 2, \dots]$ כאשר d אינו מרובע, $d \equiv 1 \pmod{4}$.
 $x^2 - dy^2 = 1$

אם $n=2$, נניח (p_n, q_n) הוא הפתרון הכללי של $x^2 - dy^2 = 1$ עם p_n, q_n זוגיים.
 נניח $p_0 = 1, q_0 = 0$.

$$q_0 = q_{-1} a_0 + q_{-2} = 1$$

$$q_1 = q_0 a_1 + q_{-1} = 1 \cdot 2 + 0 = 2$$

$$q_2 = q_1 a_2 + q_0 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$q_3 = q_2 a_3 + q_1 = 5 \cdot 2 + 2 = 12$$

$$p_0 = p_{-1} a_0 + p_{-2} = 0 = 0$$

$$p_1 = p_0 a_1 + p_{-1} = 0 \cdot 2 + 1 = 1$$

$$p_2 = p_1 a_2 + p_0 = 1 \cdot 2 + 0 = 2$$

$$p_3 = p_2 a_3 + p_1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

אם $n=3$, נניח (p_n, q_n) הוא הפתרון הכללי של $x^2 - dy^2 = 1$ עם p_n, q_n זוגיים.

$$5^2 - 6 \cdot 2^2 = 25 - 24 = 1$$

$$49^2 - 6 \cdot 22^2 = 1$$

$$(49, 22)$$

הפתרון הכללי

משפט 1.3.2. $\sqrt{d} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, 2a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0]$ כאשר $d \equiv 1 \pmod{4}$.

נניח (x, y) הוא פתרון של $x^2 - dy^2 = 1$ עם x, y זוגיים.

נניח $z = x + y\sqrt{d}$ הוא פתרון של $z\bar{z} = 1$ עם $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

אם $z = x + y\sqrt{d}$ הוא פתרון של $z\bar{z} = 1$ עם $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, אז $\bar{z} = x - y\sqrt{d}$ הוא פתרון של $\bar{z}z = 1$.

אם (x, y) הוא פתרון של $x^2 - dy^2 = 1$ עם x, y זוגיים, אז (x, y) הוא פתרון של $x^2 - dy^2 = 1$ עם x, y זוגיים.

משפט 1.3.3. $\sqrt{d} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, 2a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0]$ כאשר $d \equiv 1 \pmod{4}$.

אם V_d הוא קבוצת הפתרונות של $x^2 - dy^2 = 1$ עם x, y זוגיים, אז V_d היא קבוצת הפתרונות של $x^2 - dy^2 = 1$ עם x, y זוגיים.

משפט 1.3.4. $\sqrt{d} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, 2a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0]$ כאשר $d \equiv 1 \pmod{4}$.

$$(zw)(\bar{z}\bar{w}) = (z\bar{z})(w\bar{w})$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{1} = \bar{z}$$

$$z \in V_d, \bar{z} \in V_d$$

$$-z \in V_d, z \in V_d$$

$$z_0 = \min\{z \in \mathbb{V}_0, z \neq 1\} \quad \text{נמצא}$$

$$\mathbb{V} = \{\pm z_0^n : n \in \mathbb{Z}\} \quad ! (0 \in \mathbb{N})$$

Pell נקרא הבעיה הזו 'בעיית פל' שמונת

$$z^2 = 29 + 24\sqrt{2} + 20\sqrt{2} - 49 + 20\sqrt{2}, \quad z_0 = 5 + 2\sqrt{2}, \quad x^2 - 2y^2 = 1 \quad (\text{הצורה})$$

הצורה הזו נקראת 'בעיית פל' ו- z_0 נקראת 'הפתרון הבסיסי'.

$$1 = (x - y\sqrt{2})(x + y\sqrt{2}) \quad \text{אם } z = x + y\sqrt{2} \in \mathbb{V}_0, \quad z \neq 1, \quad \text{אז}$$

$$x - y\sqrt{2} = \frac{1}{x + y\sqrt{2}} = \frac{1}{z} \in (0, 1)$$

ומכאן $0 < x - y\sqrt{2} < 1$, $z = x + y\sqrt{2}$, $1 < z < 2$.

$$0 < x - y\sqrt{2} < 1 \Leftrightarrow 0 < 2y\sqrt{2} < x + y\sqrt{2} \Leftrightarrow 0 < y < x + y\sqrt{2}$$

הכלל $z = x + y\sqrt{2} \in \mathbb{V}_0$, $z \neq 1$, $0 < y < x + y\sqrt{2}$ נקרא 'הצורה'.

$\{z \in \mathbb{V}_0 : z \neq 1\}$ היא אוסף מסווג, ואותו נוסח / מס' - z_0 .

(8) 'ה' $z \in \mathbb{V}_0$ נקראת 'פתרון'.

$$z_0^n \leq z < z_0^{n+1} \quad \text{אם } z \in \mathbb{V}_0 \text{ ו- } z \neq 1 \quad \text{(א)}$$

נמצא $z \in \mathbb{V}_0$ ו- $\frac{z}{z_0^n} \in \mathbb{V}_0$, וזהו 'הפתרון' z_0 (הפתרון z_0)

$$z = z_0^n \quad \text{אם}$$

$$0 < z < 1 \quad \text{אם } z \in \mathbb{V}_0 \text{ ו- } z \neq 1, \quad \text{אז } z = \frac{1}{z_0^n} = z_0^{-n}$$

$$z < 0 \quad \text{אם } z \in \mathbb{V}_0 \text{ ו- } z \neq 1, \quad \text{אז } z = -z_0^n \quad \text{(ב)}$$

■ אסימטריה

כפי שראינו, z_0 נמצא בקבוצה

'ה' $p, q \in \mathbb{N}$ מתקיים $p^2 - 2q^2 = 1$ ו- $z_0 = p + q\sqrt{2}$.

$$z_0 = p + q\sqrt{2} \quad \text{אם } p, q \in \mathbb{N} \text{ ו- } p^2 - 2q^2 = 1$$

אכן, אם $z \in \mathbb{V}_0$, $z \neq 1$, אז $z = x + y\sqrt{2}$, $x, y \in \mathbb{N}$, ונכון

$$x = p, y = q \quad \text{אם } p, q \in \mathbb{N} \text{ ו- } p^2 - 2q^2 = 1$$

הצורה הזו נקראת 'הפתרון' (p, q) ו- (p, q) נקראת 'הפתרון'.

$$p^2 - 2q^2 = 1 \quad \text{אם } p, q \in \mathbb{N} \text{ ו- } p^2 - 2q^2 = 1$$