

משפט 1.1.1

המשפט

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$$

נניח d אינו רבוע שלם, $d \neq 0, 1$. אז $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ הוא תת-חבורה של $\mathbb{C}$ ביחס לסיכויים וחיבור.

$$Z = a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \quad \text{סגור} \quad \bar{Z} = a - b\sqrt{d}$$

סגור זהו איננו תת-חבורה של $\mathbb{C}$ ביחס לכפל, אלא תת-חבורה של $\mathbb{C}$ ביחס לסיכויים וחיבור. נניח $\alpha = a + b\sqrt{d}$, $\beta = c + e\sqrt{d}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. אז:

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = (a + b\sqrt{d} + c + e\sqrt{d})(a + b\sqrt{d} - c - e\sqrt{d})$$

$$= (a + c + (b + e)\sqrt{d})(a - c - (b + e)\sqrt{d}) = (a + c)^2 - (b + e)^2 d$$

$$\left(\frac{1}{\alpha + \beta}\right)' = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha^2 - \beta^2 d}\right)' = \frac{\alpha - \beta}{\alpha^2 - \beta^2 d} = \frac{1}{(\alpha + \beta)'} \quad \text{אם } \alpha \neq \beta$$

עבור $\alpha = a + b\sqrt{d}$, $\beta = c + e\sqrt{d}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. אז:

$$\alpha^2 - \beta^2 d = (a + b\sqrt{d})^2 - (c + e\sqrt{d})^2 d = a^2 + 2ab\sqrt{d} + b^2 d - c^2 d - 2ce\sqrt{d} - e^2 d^2$$

ואם $\alpha = a + b\sqrt{d}$, $\beta = c + e\sqrt{d}$, אז:

$$\alpha^2 - \beta^2 d = (a^2 + 2ab\sqrt{d} + b^2 d) - (c^2 d + 2ce\sqrt{d} + e^2 d^2)$$

נניח $\alpha = a + b\sqrt{d}$, $\beta = c + e\sqrt{d}$, אז:

$$\alpha^2 - \beta^2 d = (a^2 + 2ab\sqrt{d} + b^2 d) - (c^2 d + 2ce\sqrt{d} + e^2 d^2)$$

נניח $\alpha = a + b\sqrt{d}$, $\beta = c + e\sqrt{d}$, אז:

$$\alpha^2 - \beta^2 d = (a^2 + 2ab\sqrt{d} + b^2 d) - (c^2 d + 2ce\sqrt{d} + e^2 d^2)$$

נניח $\alpha = a + b\sqrt{d}$, $\beta = c + e\sqrt{d}$, אז:

$$\alpha^2 - \beta^2 d = (a^2 + 2ab\sqrt{d} + b^2 d) - (c^2 d + 2ce\sqrt{d} + e^2 d^2)$$

נניח $\alpha = a + b\sqrt{d}$, $\beta = c + e\sqrt{d}$, אז:

$$\alpha^2 - \beta^2 d = (a^2 + 2ab\sqrt{d} + b^2 d) - (c^2 d + 2ce\sqrt{d} + e^2 d^2)$$

נניח $\alpha = a + b\sqrt{d}$, $\beta = c + e\sqrt{d}$, אז:

$$\alpha^2 - \beta^2 d = (a^2 + 2ab\sqrt{d} + b^2 d) - (c^2 d + 2ce\sqrt{d} + e^2 d^2)$$

נניח $\alpha = a + b\sqrt{d}$, $\beta = c + e\sqrt{d}$, אז:

$$\alpha^2 - \beta^2 d = (a^2 + 2ab\sqrt{d} + b^2 d) - (c^2 d + 2ce\sqrt{d} + e^2 d^2)$$

$$-\frac{1}{\theta_{n+1}} = a_n - \theta_n \quad \text{12d}$$

$$\gamma < -\theta_n^1 < 0 \quad \text{--- e. i. i. s., } \theta_n^1 = \left[-\frac{1}{\theta_{n+1}^1} \right] \quad \begin{matrix} \theta_{n+1}^1 \in (0, 1) \\ \text{, i. i. l.} \\ \text{, i. o. l.} \end{matrix}$$

שם המלך משה, יתום של שושלת מלכות.

דברי, ק"מ, פ' 7L, ק, 2

$$\theta_k = \theta_L \Rightarrow \theta'_k \neq \theta'_L$$

$$x_{k-1} = \left[-\frac{1}{\theta_1'} \right] = \left[-\frac{1}{\theta_2'} \right] = 0.7 \text{ p.u.}$$

$$\theta_{k-1} = a'_{k-1} + \frac{1}{\theta_k}$$

$$\theta_{L-1} = a_{L-1} + \frac{1}{\theta_L}$$

$$\Theta_{K-1} = \Theta_{L-1}$$

רש"מ יום ו' ה'תק"ל ג' 150 -

$$\theta = \theta_0 = \theta_{K-L}$$

לאומקד'ת'ית א' פ'מער נשנ'ג מחזורי ת'ה'ר.

מחנות:

(7) $p \in \mathbb{R}$ ו- $a \in \mathbb{R}$ נתון. $\frac{1}{\sqrt{a} + \lfloor \sqrt{a} \rfloor}$ מחזורי? $\frac{1}{\sqrt{a} - \lfloor \sqrt{a} \rfloor}$ מחזורי? $\frac{1}{\sqrt{a} + \lfloor \sqrt{a} \rfloor}$ מחזורי? $\frac{1}{\sqrt{a} - \lfloor \sqrt{a} \rfloor}$ מחזורי?

(1) μ_k is the mean of X_k and σ_k^2 is the variance of X_k .

$$\sqrt[n]{a} = [a_0, \overline{a_1, \dots, a_n}] \quad (1) \quad (2) \quad (3) \quad (4)$$

הוכחות:

$$\theta = \lfloor \sqrt{d} \rfloor - \sqrt{d} \in (-1, 0), \quad \theta = \lfloor \sqrt{d} \rfloor + \sqrt{d} \gg \quad (10)$$

$$\theta = -\frac{1}{\sqrt{2} \pm \sqrt{2}} \in (-1, 1) \quad , \quad \theta = \frac{1}{\sqrt{2} \pm \sqrt{2}} \in (-1, 1) \quad (7)$$

$$\sqrt{2} + \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 7 \quad 10$$

$$\theta_1 = a_1 + \frac{1}{\sigma} \epsilon_1 = \frac{1}{\sigma} a_0, \quad a_0 = L(\theta) = L(\sqrt{\theta}) \quad \text{st. } \theta \sim \sqrt{\theta} \quad \text{pk } (2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} [\sqrt{2}] \quad \leftarrow$$

1. $\frac{1}{2} \log \frac{1}{2}$ (1/2) (1/2)

משוואת Pell (Pell)

נתון מספר טבעי d , לא רבוע שלם, נמצא את כל הפתרונות של המשוואה:

$$x^2 - dy^2 = 1$$

נגדיון ל- $(1, 0)$ פתרון שלם, נקראת $(-1, 0)$ (באופן טבעי, אם (x, y) פתרון שלם אז גם $(-x, -y)$, $(x, -y)$, $(-x, y)$).

פתרונות שלמים (ובמיוחד הפתרונות $(\pm 1, 0)$), אינם פתרונות גרים של $x=0$ או $y=0$.
לכן, כאשר מתבטאים פתרונות נוספים, מסתכן להכיל גם פתרונות.