

θ בדיקה $k \geq 0$ של $s_k, c_n = \frac{p_n}{q_n}$ (3.2) (3.2)

$$c_0 < c_2 < \dots < c_{2k} \leq \theta < c_{2k+1} < \dots < c_{2k+2}$$

$$c_L - c_{L-1} = \frac{p_L}{q_L} - \frac{p_{L-1}}{q_{L-1}} = \frac{(-1)^{L-1}}{q_L q_{L-1}}$$

דיון

$$c_{2k+1} - c_{2k} = \frac{1}{q_{2k+1} q_{2k}} > 0 \text{ עבור } L=2k+1$$

$$c_L - c_{L-2} = c_L - c_{L-1} + c_{L-1} - c_{L-2} = \frac{(-1)^{L-1}}{q_L q_{L-1}} + \frac{(-1)^{L-2}}{q_{L-1} q_{L-2}} = \frac{(-1)^{L-1}}{q_L q_{L-1}} \left(\frac{1}{q_{L-1}} - \frac{1}{q_{L-2}} \right)$$

הוא < 0

הוא הסדר הכולל הוא

$a < b < c_{n+1}$ - כלומר $a < b < c_{n+1}$

$$|q_n \theta - p_n| \leq |b \theta - a|$$

הצורה $a < b < c_{n+1}$ של a, b נכונה $a < b < c_{n+1}$

$$\left| \theta - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{b}{q_n} \left| \theta - \frac{a}{b} \right| \leq \left| \theta - \frac{a}{b} \right|$$

הוא $\frac{p_n}{q_n}$ הוא הקירוב הכי טוב (הכי קטן) של θ עם q_n במונה. $a = p_n u + p_{n+1} v$ ו- $b = q_n u + q_{n+1} v$ עבור u, v מסוימים. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & p_{n+1} \\ q_n & q_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} p_n & p_{n+1} \\ q_n & q_{n+1} \end{vmatrix} = p_n q_{n+1} - q_n p_{n+1} = (-1)^n$$

הוא n

$$\begin{pmatrix} p_n & p_{n+1} \\ q_n & q_{n+1} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} q_{n+1} & -p_{n+1} \\ -q_n & p_n \end{pmatrix}$$

הוא n

$$v = \frac{b}{q_{n+1}} \text{ עבור } u \neq 0$$

$$\frac{|b \theta - a|}{|q_n \theta - p_n|} = \frac{|q_n u \theta - p_n u|}{|q_n \theta - p_n|} = |u| \frac{|q_n \theta - p_n|}{|q_n \theta - p_n|} = |u|$$

הוא $v=0$ אם $u \neq 0$

$$|b\theta - a| = |(q_n + L_{n+1}V)\theta - p_n u - p_{n+1}V| = |(q_n\theta - p_n)u + (q_{n+1}\theta - p_{n+1})V| = SK, \quad V \neq 0 \quad (2)$$

$$= |q_n \underbrace{(\theta - \frac{p_n}{q_n})}_0 u + q_{n+1} \underbrace{(\theta - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}})}_0 V| \equiv$$

סימנים קטנים
הם לא קשורים

נראה כי $1 \leq b \leq q_{n+1}$ פ"ק נ"ל $b = q_n u + q_{n+1} V$ ו $u, V < 0$ נ"ל

$$\equiv |u q_n| \theta - \frac{p_n}{q_n} + |V| q_{n+1} \theta - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} > |q_n \theta - p_n| \quad SK$$

משפט 1.1 p ו q פ"ק נ"ל

נניח כי (θ) הקטנה ביותר של θ ש $\theta \in \mathbb{Q}$ היא θ הנקראת פ"ק נ"ל

$$a\theta^2 + b\theta + c = 0$$

$$\left\lfloor \frac{a+x}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a+Lx}{b} \right\rfloor \quad SK, x \in \mathbb{R}, b \neq 0, a, b \text{ מס' שלמים}$$

$$\frac{a+Lx}{b} < k \leq \frac{a+x}{b} \quad \text{פ"ק נ"ל } k \text{ מס' שלם}$$

$$\downarrow$$

$$a+Lx < bk \leq a+x$$

$$Lx < bk - a \leq x$$

אם k פ"ק נ"ל SK, x - כל מס' שלם

$$a_2 = \lfloor \theta_2 \rfloor = 2 + \lfloor \sqrt{6} \rfloor = 4$$

$$\theta_2 = a_2 + \frac{1}{\theta_1} \Rightarrow \theta_2 = \frac{1}{\theta_1 - a_1} = \frac{1}{2\sqrt{6} - 4} = \frac{1}{\sqrt{6} - 2} = \theta_1$$

נראה כי θ_1 ו θ_2 הם פ"ק נ"ל

$$\sqrt{6} = [2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, \dots] = [2, \frac{\sqrt{6}}{4}]$$

הפ"ק נ"ל

$$a_0 = \lfloor \sqrt{6} \rfloor = 2, \quad \theta = \sqrt{6}$$

$$\theta = a_0 + \frac{1}{\theta_1} \Rightarrow \theta_1 = \frac{1}{\theta - a_0} = \frac{1}{\sqrt{6} - 2}$$

$$= \frac{2 + \sqrt{6}}{6 - 4} = \frac{2 + \sqrt{6}}{2}$$

$$a_1 = \left\lfloor \frac{2 + \sqrt{6}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2 + \lfloor \sqrt{6} \rfloor}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor = 2$$

$$\theta_2 = a_1 + \frac{1}{\theta_1} \Rightarrow \theta_2 = \frac{1}{\theta_1 - a_1} = \frac{1}{\frac{2 + \sqrt{6}}{2} - 2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6} - 2} = \frac{2 \cdot (2 + \sqrt{6})}{2} = 2 + \sqrt{6}$$

$\text{p.k. } x^2 + 1 \text{ k } b^2 - 4ac$
 $\text{d.k. } ax^2 + bx + c$
 $\text{f.k. } \text{p.k.'s } \theta \text{ in } \underline{\text{CoEN}}$

$$\frac{D}{2} = \frac{7}{2}$$

$$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\varphi = a + b\sqrt{d} \quad \text{1) } \text{p.p.} \varphi = [a_{k_1}, \dots, a_{k+m_2}] \quad |N\varphi|$$

$$\varphi = \left[a_{k_1}, \dots, a_{k+m-1} + \frac{1}{\varphi} \right] = \frac{p_{m-1}(a_{k_1}, \dots, a_{k+m-1} + \frac{1}{\varphi})}{q_{m-1}(a_{k_1}, \dots, a_{k+m-1} + \frac{1}{\varphi})} = \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}} =$$

קיימת φ מההיג'וראלי (קוידית) עם הקצבים δ כן, $\varphi = a + b\sqrt{d}$,
כאשר $a, b \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}$ אינו כריז (בין δ)
ע' הכמות φ גורם שולק אינסופי.

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$, $\theta \sim \theta$ שווה (1) 2
 $((\theta - \alpha)^2 = \beta^2)$

$$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 \quad n' \text{ ז' } n' \quad n' \text{ ז' } n' \quad n' \text{ ז' } n' \quad n' \text{ ז' } n'$$

Le מרץ! נראה כי אולי החזיתות (הן) יוכלו לזרז את הפעילות

$$x_n = x_{n-1} \quad (10) \quad y_n = f_n(0, 1) = \quad , \quad x_n = f_n(1, 0) = \quad$$

5 K

הפונקציה f היא פולינום ממעלה n ויש לה n נקודות שכיבועות.

הפונקציה f היא פולינום ממעלה n ויש לה n נקודות שכיבועות.

$Q_n = f(p_n, q_n) = a p_n^2 + b p_n q_n + c q_n^2 = -e$ (1)

$= q_n^2 \left(a \left(\frac{p_n}{q_n} \right)^2 + b \frac{p_n}{q_n} + c \right) =$

$\rightarrow a \theta^2 + b \theta + c = 0$

$Q_n = Q_n - q_n^2 (a \theta^2 + b \theta + c) = q_n^2 \left(a \left(\frac{p_n}{q_n} - \theta \right)^2 + b \left(\frac{p_n}{q_n} - \theta \right) + c \right) =$

הפונקציה f היא פולינום ממעלה n ויש לה n נקודות שכיבועות.

הפונקציה f היא פולינום ממעלה n ויש לה n נקודות שכיבועות.

הפונקציה f היא פולינום ממעלה n ויש לה n נקודות שכיבועות.

$$= \frac{p_n(a_0, \dots, a_{n-1}, \frac{1}{\theta_{n+1}})}{q_n(a_0, \dots, a_{n-1}, \frac{1}{\theta_{n+1}})} = \frac{p_n + \frac{p_{n-1}}{\theta_{n+1}}}{q_n + \frac{q_{n-1}}{\theta_{n+1}}} = \frac{p_n \theta_{n+1} + p_{n-1}}{q_n \theta_{n+1} + q_{n-1}}$$

$$f_n(\theta_{n+1}) = f_n(\theta_{n+1}, 1) \left(\begin{matrix} p_n q_n \\ p_{n-1} q_{n-1} \end{matrix} \right) = f \left(\frac{p_n \theta_{n+1} + p_{n-1}}{q_n \theta_{n+1} + q_{n-1}}, 1 \right) =$$

$$= \left(\frac{p_n \theta_{n+1} + p_{n-1}}{q_n \theta_{n+1} + q_{n-1}} \right)^2 f \left(\frac{p_n \theta_{n+1} + p_{n-1}}{q_n \theta_{n+1} + q_{n-1}}, 1 \right) = 0$$