

עקרית השלמות וקירוב צ'ורנסקי

משפט: (צ'ורנסקי) לכל מס' ממשי θ ולכל $N \in \mathbb{N}$ קיים מס' טבעי k כזה

$$|b\theta - a| \leq \frac{1}{b^2} < \frac{1}{N^2} \quad -1 < b \leq 1$$

$$\text{במקרה, } \left| \theta - \frac{a}{b} \right| \leq \frac{1}{b^2} < \frac{1}{N^2}$$

(קירוב צ'ורנסקי): קירוב של θ (מ'ק)

הוכחה: ג'סימילי קטנה.

לכתיבת השלמות

$$\frac{173}{39} = 4 + \frac{17}{39} = 4 + \frac{39}{17} = 4 + 2 + \frac{1}{17} = 4 + 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}} = 4 + 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}} = 4 + 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}}$$

הערך השלמות $k = \frac{173}{39}$

נראה קרייטש שלמים שלמים הם התאמה

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{סדרות סיימל שלמים} \\ a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \end{array} \right\} \xleftrightarrow{\text{חשש ויד}} \left\{ \begin{array}{l} \text{סדרות שלמים} \\ a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{סדרות ממוסמיות שלמים} \\ a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \end{array} \right\} \xleftrightarrow{\text{חשש ויד}} \left\{ \begin{array}{l} \text{סדרות שלמים} \\ a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \end{array} \right\}$$

$$\text{התהליך הבנוי: } \theta \in \mathbb{R} \text{ (מס'). } \theta = a_0 + \frac{1}{\theta_1}, \theta_1 = a_1 + \frac{1}{\theta_2}, \dots, \theta_n = a_n + \frac{1}{\theta_{n+1}}, \dots$$

$$\theta = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{\ddots}}}}} \quad \text{לכל } n \in \mathbb{N} \quad \theta_n = a_n + \frac{1}{\theta_{n+1}}$$

אם הוכחנו סופיקוודא θ - וולמק, וולמק שלם לקיכך נכון.

$$\left[a_0, a_1, \dots, a_n \right] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}}$$

יש 3 סוגים של פולינומים

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = 1 \quad \theta \quad \text{הפונקציה הנתונה}$$

זהו פולינום "הזוגי" או "הזוגי" (הפונקציה הזוגי היא פולינום "הזוגי", הפונקציה הזוגי היא פולינום "הזוגי")

$$[a_0, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}} \rightarrow \text{הפונקציה הזוגי}$$

$$[a_0] = a_0 = \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}$$

$$[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}$$

$$[a_0, a_1, a_2] = \dots = \frac{a_2 a_1 a_0 + a_2 + a_1 a_0 + 1}{a_2 a_1 + 1} = \frac{p_2}{q_2}$$

הפונקציה הזוגי היא פולינום "הזוגי", $p_n, q_n \in \mathbb{Z}[a_0, \dots, a_n]$, p_n, q_n הם פולינומים

הפונקציה הזוגי היא פולינום "הזוגי", p_n, q_n הם פולינומים

$$p_{k+1} = a_{k+1} p_k + p_{k-1}, \quad p_{-2} = 0, \quad p_{-1} = 1$$

$$q_{k+1} = a_{k+1} q_k + q_{k-1}, \quad q_{-2} = 1, \quad q_{-1} = 0$$

$$[a_0, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$$

הפונקציה הזוגי היא פולינום "הזוגי", p_n, q_n הם פולינומים

$$n=0: [a_0] = \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}, \quad p_0 = a_0, \quad q_0 = 1$$

הפונקציה הזוגי היא פולינום "הזוגי", p_n, q_n הם פולינומים

$$n=1: [a_0, a_1] = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}, \quad p_1 = a_0 a_1 + 1 = p_0 a_1 + p_{-1}, \quad q_1 = a_1 = a_1 q_0 + q_{-1}$$

הפונקציה הזוגי היא פולינום "הזוגי", p_n, q_n הם פולינומים

$$[a_0, \dots, a_k, a_{k+1}] = [a_0, \dots, a_k + \frac{1}{a_{k+1}}]$$

$$= \frac{p_k(a_0, \dots, a_k + \frac{1}{a_{k+1}})}{q_k(a_0, \dots, a_k + \frac{1}{a_{k+1}})} = \frac{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}) p_{k-1} + p_{k-2}}{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}) q_k + q_{k-1}} = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2} + \frac{p_{k-1}}{a_{k+1}}}{a_k q_k + q_{k-1} + \frac{q_{k-1}}{a_{k+1}}} =$$

$$= \frac{p_k + \frac{p_{k-1}}{a_{k+1}}}{q_k + \frac{q_{k-1}}{a_{k+1}}} = \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + q_{k-1}} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$$

כך, יהי $a_0, a_1, \dots$ סדרה של מספרים טבעיים. נגדיר (q_i) סדרה של מספרים טבעיים על ידי $q_0 = 1, q_1 = a_1$ ו- $q_{k+1} = a_{k+1} q_k + q_{k-1}$ עבור $k \geq 1$.
 נגדיר גם (p_i) סדרה של מספרים טבעיים על ידי $p_0 = 0, p_1 = 1$ ו- $p_{k+1} = a_{k+1} p_k + p_{k-1}$ עבור $k \geq 1$.
 נראה כי $\frac{p_k}{q_k}$ מתכנס ל-1.

ראינו כבר $q_0 = 1$ ו- $q_1 = a_1$.
 $k \geq 1$ $q_{k+1} = a_{k+1} q_k + q_{k-1}$
 $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + q_{k-1}}$

נקודת איתור $k=0$ $q_1 = a_1 q_0 + q_{-1}$ $a_1 \in \mathbb{N}$
 $p_k - q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}$
 הוכחה: עבור $k=1$
 $p_1 - q_0 - p_0 q_1 = 1 - 1 - 0 \cdot a_1 = 0 = (-1)^0$

נניח $k \geq 1$ $p_k - q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}$

$= (a_k p_{k-1} + p_{k-2}) q_{k-1} - p_{k-1} (a_k q_{k-1} + q_{k-2}) =$

$= p_{k-2} q_{k-1} - p_{k-1} q_{k-2} = - (p_{k-1} q_{k-2} - p_{k-2} q_{k-1})$

נחזיר חזרה $k-1$ $= -(-1)^{k-2} = (-1)^{k-1}$

נסקרו p_k, q_k זרים לכל $k \geq 2$.

הוכחה: עבור $k=2$, נניח d מחלק את p_2 ו- q_2 .
 $p_2 q_1 - p_1 q_2 = (-1)^{2-1} = -1$
 $d \mid p_2 q_1 - p_1 q_2 \Rightarrow d \mid -1 \Rightarrow d = 1$

המשפט הראשון מלמד כי (p_k, q_k) זוג של מספרים טבעיים ש- $\frac{p_k}{q_k}$ מתכנס ל-1.
 המשפט השני מלמד כי $\frac{p_k}{q_k}$ מתכנס ל-1 במהירות.

$$\frac{1}{39} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

שאלה 1: $\frac{1}{39}$

נניח את הקשר האחרון
כלומר $\frac{1}{39} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$$11 = 12 + 7 + 7$$

$$11 = 12 + 7 + 5$$

$$11 = 12 + 5 + 2$$

$$11 = 12 + 7$$

$$11 = 12 + 0$$

שאלה 2: $\frac{1}{39}$

נניח את הקשר האחרון

$\frac{1}{39} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

האם $\frac{a}{b}$ הוא מספר
הוא (הוא) גדול מ-1

יהי θ מספר ממשי נקבע θ ונניח $\theta \in [a_0, \dots, a_k]$

$$| \theta - \frac{p_k}{q_k} | < \frac{1}{q_k^2}$$

$$\frac{1}{q_k^2}$$

הכרחי, $\frac{p_k}{q_k} \rightarrow \theta$ כ- $k \rightarrow \infty$

הוכחה: נניח $\theta \in [a_0, \dots, a_k]$ ונניח $\theta \in [a_0, \dots, a_k]$

$$\theta = [a_0, a_1, \dots, a_k, \frac{1}{\theta_{k+1}}]$$

$$\theta - \frac{p_k}{q_k} = \frac{p_k(a_0, a_1, \dots, a_k, \frac{1}{\theta_{k+1}})}{q_k(a_0, a_1, \dots, a_k, \frac{1}{\theta_{k+1}})} - \frac{p_k}{q_k} =$$

$$= \frac{(a_k + \frac{1}{\theta_{k+1}}) p_{k-1} + p_{k-2}}{(a_k + \frac{1}{\theta_{k+1}}) q_{k-1} + q_{k-2}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{p_{k-1} + \frac{p_{k-1}}{\theta_{k+1}}}{q_{k-1} + \frac{q_{k-1}}{\theta_{k+1}}} - \frac{p_k}{q_k} =$$

$$= \frac{\theta_{k+1} p_k q_{k-1} + p_{k-1} q_k - p_k \theta_{k+1} q_{k-1} - p_{k-1} q_k}{q_k (\theta_{k+1} q_k + q_{k-1})} = \frac{(-1)^k}{q_k (\theta_{k+1} q_k + q_{k-1})}$$

$$\frac{p_k}{q_k}$$



$$\theta_{k+1}, q_{k-1} > 1, \left| \theta - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k^2}$$

1/1